

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Ю.А. Померанцев, В.В. Свиридов

Введение в синергетику

*Учебно-методическое пособие
для студентов магистратуры, обучающихся по направлению подготовки
44.04.01 «Педагогическое образование», профиль «Физическое
образование» и студентов бакалавриата, обучающихся по направлению
44.03.05 «Педагогическое образование», профили «Естествознание»,
«Физика»*

ВОРОНЕЖ
Воронежский государственный педагогический университет
2017

УДК 53.01(07)
ББК В22.31я7
П55

Издано по решению
учебно-методического совета ВГПУ.
Протокол № 5 от 16.03.2017 г.

Научный редактор
кандидат физико-математических наук, доцент ВГПУ *Г.В. Афонин*

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, зав. кафедрой экспериментальной
физики ВГУ, профессор *С.Н. Дрождин*;
кандидат физико-математических наук, профессор кафедры информатики
и методики преподавания математики ВГПУ *В.А. Чулюков*

Померанцев Ю.А.

П55 Введение в синергетику: для студентов магистратуры, обучаю-
щихся по направлению подготовки 44.04.01 «Педагогическое образо-
вание», профиль «Физическое образование» и студентов бакалавриа-
та, обучающихся по направлению 44.03.05 «Педагогическое образо-
вание», профили «Естествознание», «Физика» / Ю.А. Померанцев,
В.В. Свиридов. – Воронеж: Воронежский государственный педагогиче-
ский университет, 2017. – 88 с.

В методических указаниях приводится краткая сводка теоретических сведе-
ний, порядок выполнения, контрольные вопросы и список литературы к темам
практикума по курсам «Синергетика» и «Нелинейная динамика».

Издание предназначено для студентов магистратуры по направлению
44.04.01 «Педагогическое образование» программы подготовки «Физическое об-
разование» и бакалавриата по направлению 44.03.05 «Педагогическое образо-
вание» профилей «Естествознание», «Физика» физико-математического факультета.

УДК 53.01(07)
ББК В22.31я7

©Померанцев Ю.А., Свиридов В.В., 2017
© Воронежский государственный педагогический университет,
редакционно-издательская обработка, 2017

Оглавление

Введение	5
ТЕМА № 1. Моделирование линейного и нелинейного осцилляторов ..	6
1.1. Теоретическое введение	6
<i>А. Линейный гармонический осциллятор с затуханием на примере электрического колебательного контура</i>	<i>6</i>
<i>А1. Решение уравнения динамики линейного осциллятора без затухания</i>	<i>7</i>
<i>А2. Решение уравнения динамики линейного осциллятора с затуханием</i>	<i>8</i>
<i>В. Математический маятник</i>	<i>10</i>
<i>С. Алгоритм Эйлера</i>	<i>12</i>
1.2. Порядок выполнения работы	13
1.3. Контрольные вопросы	14
1.4. Список литературы	15
ТЕМА № 2. Исследование экологической динамики в модели «хищник-жертва» Лотки-Вольтерры	17
2.1. Теоретическое введение	17
<i>А. Модель Лотки-Вольтерры</i>	<i>17</i>
<i>В. Равновесие в модели Лотки-Вольтерры</i>	<i>18</i>
<i>С. Динамика роста с учетом ограниченности ресурсов. Логистическая кривая</i>	<i>21</i>
<i>Д. Приведение уравнений модели Лотки–Вольтерры к виду, удобному для численного решения</i>	<i>24</i>
2.2. Порядок выполнения работы	24
2.3. Контрольные вопросы	25
2.4. Список литературы	25
ТЕМА № 3. Моделирование генератора Ван дер Поля	27
3.1. Теоретическое введение	27
<i>А. Осциллятор с затуханием, зависящим от амплитуды</i>	<i>27</i>
<i>В. Фазовый портрет осциллятора с переменным затуханием. Предельный цикл</i>	<i>28</i>
<i>С1. Автоколебания</i>	<i>29</i>
<i>С2. Генератор Ван дер Поля</i>	<i>30</i>
<i>С3. Слабо нелинейные автоколебания. Анализ методом возмущений</i>	<i>33</i>
<i>Д. Релаксационные автоколебания</i>	<i>36</i>
<i>Е. Уравнение Рэля. Разделение быстрых и медленных движений</i>	<i>38</i>
<i>Ф. Автоколебания в биологических системах</i>	<i>41</i>
3.2. Порядок выполнения работы	42
3.3. Контрольные вопросы	42
3.4. Список литературы	43
ТЕМА №4. Исследование отображения Ферхюльста	44
4.1. Теоретическое введение	44
4.2. Порядок выполнения работы	47

4.3. Контрольные вопросы	48
4.4. Список литературы	49
ТЕМА № 5. Исследование множеств Жюлиа и Мандельброта	50
5.1. Теоретическое введение	50
<i>A. Квадратичное отображение комплексной плоскости</i>	<i>50</i>
<i>B. Динамика отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ при $C = 0$</i>	<i>50</i>
<i>C. Неподвижная точка отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$</i>	<i>50</i>
<i>D. Множество Жюлиа и его компьютерное построение</i>	<i>51</i>
<i>E. Множество Мандельброта и его компьютерное построение</i>	<i>54</i>
<i>F. Фрактальная природа множеств Мандельброта и Жюлиа</i>	<i>56</i>
5.2. Порядок выполнения работы	57
5.3. Контрольные вопросы	57
5.4. Список литературы	57
ТЕМА №6. Исследование странного аттрактора Лоренца	59
6.1. Теоретическое введение	59
6.2. Порядок выполнения работы	63
6.3. Контрольные вопросы	64
6.4. Список литературы	64
ТЕМА №7. Исследование модели брюсселятора	66
7.1. Теоретическое введение	66
<i>A. Реакция Белоусова-Жаботинского</i>	<i>66</i>
<i>B1. Описание модели брюсселятора</i>	<i>67</i>
<i>B2. Исследование модели брюсселятора</i>	<i>69</i>
<i>B3. Поведение решений</i>	<i>70</i>
7.2. Порядок выполнения работы	72
7.3. Контрольные вопросы	73
7.4. Список литературы	73
ПРИЛОЖЕНИЕ. Листинги программ для работы в пакете <i>MathCad</i>. 74	
A. Программа Oscillator-1. Гармонический осциллятор	74
B. Программа Oscillator-2.	
Гармонический осциллятор в среде с вязким трением	75
C. Программа Oscillator-3. Математический маятник	76
D. Программа VDP-generator. Генератор Ван дер Поля	78
E. Программа LV-model. Модель Лотки-Вольтерры	79
F. Программа FERHULST-graph	81
G. Программа JULIA-graph. Множество Жюлиа	82
H. Программа MANDELBROT-graph. Множество Мандельброта	83
I. Программа Brusselator. Брюсселятор	85
J. Программа Lorenz Attractor. Аттрактор Лоренца	87

Введение

Компьютерное моделирование в настоящее время становится одним из мощных методов исследования физических явлений. Он имеет свои особенности, преимущества и недостатки по сравнению с другими методами изучения физических систем. Ясно, что студенты высших учебных заведений должны иметь представления о компьютерных моделях, разных численных методах изучения различных объектов познания, достаточно свободно ориентироваться в современных программных пакетах. Современный персональный компьютер позволяет за несколько секунд решить сложную систему линейных и нелинейных уравнений, построить двумерный и трехмерный график изучаемой зависимости, промоделировать трудновоспроизводимый эксперимент.

Курсы «Синергетика», «Нелинейная динамика», которые читаются на физико-математических специальностях университета, носят междисциплинарный характер и знакомят с основными идеями нелинейного естествознания и их приложениями к конкретным физическим, химическим и биологическим системам. На концепциях, образах и результатах нелинейных моделей физики, химии и биологии базируется понимание мира в современном естествознании.

В методических указаниях дается описание компьютерного практикума к курсам «Синергетика», «Нелинейная динамика», разработанного в пакете «MathCad». Выполнение работ и заданий практикума позволит студентам лучше сформировать профессиональные компетенции, связанные с готовностью использовать индивидуальные креативные способности для оригинального решения исследовательских задач, готовностью самостоятельно осуществлять научное исследование в рамках нового Федерального государственного стандарта высшего образования (ФГОС-3+).

ТЕМА № 1.

Моделирование линейного и нелинейного осцилляторов

Цель работы: моделирование колебаний линейного гармонического осциллятора с затуханием и без затухания, моделирование линейных и нелинейных колебаний математического маятника.

1. 1. Теоретическое введение

А. Линейный гармонический осциллятор с затуханием на примере электрического колебательного контура

Рассмотрим электрический колебательный контур, состоящий из емкости C , сопротивления R , индуктивности L , соединенные последовательно друг с другом (рис. 1).

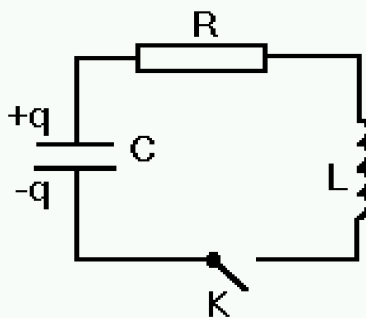


Рис. 1. Электрический колебательный контур, состоящий из емкости C , сопротивления R и индуктивности L

Для заряда q , тока в контуре I и э. д. с. ε_i , наводимой индуктивностью L можно написать:

$$q = CU_c, I = \frac{U_R}{R}, \varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt} \quad (1.1)$$

Здесь U_R – напряжение на резисторе, U_c – напряжение на обкладках конденсатора.

Пусть в момент $t = 0$ ключ K замыкают. Уравнения Кирхгофа для контура запишутся в виде:

$$\sum_n \varepsilon_n = \sum_n U_n \quad (1.2)$$

или

$$\varepsilon_i = U_R + U_c, \quad (1.3)$$

$$-L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C} \quad (1.4)$$

Учитывая, что $I = dq/dt$, получаем:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (1.5)$$

Введём безразмерную переменную $y = q/q_0$, где $q_0 = q(t=0)$. Для неё получаем однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0, \quad (1.6)$$

где $\gamma = R/2L$ – коэффициент затухания, $\omega_0^2 = 1/LC$ – собственная частота колебательного контура.

А1. Решение уравнения динамики линейного осциллятора без затухания

Считаем, что коэффициент затухания γ равен нулю. Тогда уравнение (1.6) запишется в виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \quad (1.7)$$

Применим к (1.7) подстановку

$$y = e^{pt}: \frac{dy}{dt} = pe^{pt}; \frac{d^2y}{dt^2} = p^2 e^{pt} \quad (1.8)$$

Тогда для p получаем уравнение:

$$p^2 + \omega_0^2 = 0; p^2 = -\omega_0^2. \quad (1.9)$$

Отсюда $p = \pm i\omega_0$, где i – мнимая единица: $i^2 = -1$.

В данном случае характеристические показатели чисто мнимые.

Общее решение дифференциального уравнения (1.7) запишется в виде:

$$y = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (1.10)$$

Что такое функция e^{ix} ?

Разложение в ряд Тейлора функции e^x имеет вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad (1.11)$$

Таким образом, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ – комплексное число. Преобразуем решение (1.10):

$$y = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} = A_1 \cos \omega_0 t + iA_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t - iA_2 \sin \omega_0 t = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + i(A_1 - A_2) \sin \omega_0 t \quad (1.12)$$

Вводя обозначения $B_1 = A_1 + A_2$ и $B_2 = i(A_1 - A_2)$, получаем *общее решение дифференциального уравнения (1.7) в виде:*

$$y = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t. \quad (1.13)$$

Постоянные B_1 и B_2 определяются из начальных условий:

$$\begin{aligned} y(t=0) = B_1 = y_0 &\Rightarrow B_1 = y_0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \omega_0 B_2 = v_0 &\Rightarrow B_2 = v_0 / \omega_0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (1.7) с учетом начальных условий можно представить в виде:

$$y = y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (1.15)$$

Учитывая тождество

$$G \cos \alpha + H \sin \alpha \equiv \sqrt{G^2 + H^2} \cos \left(\alpha - \arctg \frac{H}{G} \right), \quad (1.16)$$

решение (1.16) можно переписать в виде:

$$y = Y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.17)$$

где $Y_0 = \sqrt{y_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2}$ – амплитуда, а $\varphi_0 = -\arctg(v_0 / y_0 \omega_0)$ – начальная фаза.

Два важных вывода из проведенного анализа:

1. Амплитуда линейного осциллятора определяется только внешним воздействием.

2. Частота линейного осциллятора зависит только от его свойств, но не от внешнего воздействия.

A2. Решение уравнения динамики линейного осциллятора с затуханием

Имеем дифференциальное уравнение линейного осциллятора в среде с вязким трением в виде:

$$y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = 0. \quad (1.18)$$

Применим к (1.18) подстановку

$$y = e^{pt}: \quad p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0 \quad (1.19)$$

Для корней квадратного уравнения получаем решения в виде:

$$\frac{D}{4} = \gamma^2 - \omega_0^2 \Rightarrow p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (1.20)$$

а) *передемпфированный осциллятор*: случай большого затухания $\gamma > \omega_0$.

$$\gamma^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \Leftrightarrow R^2 > \frac{4L}{C} \quad (1.21)$$

$$p_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0, \quad p_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0 \quad (1.22)$$

Общее решение (1.18) тогда запишется в виде:

$$y = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = \left(A_1 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) e^{-\gamma t} \quad (1.23)$$

Наложим на решение (1.23) начальные условия:

$$q = q_0 \Rightarrow y_0 = 1, \quad I = 0 \Rightarrow y'_0 = 0 \quad (1.24)$$

В итоге получаем:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + A_2 = 1 \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} \\ A_2 = \frac{-p_1}{p_2 - p_1} \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, \\ A_2 &= \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

и физическое решение есть:

$$\begin{aligned} y &= \left\{ \frac{1}{2} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) + \frac{\gamma}{i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left(e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \right\} e^{-\gamma t} = \\ &= \left\{ ch\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} sh\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right\} e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (1.27)$$

б) *недодемпфированный осциллятор*: случай малого затухания, $\gamma < \omega_0$.

$$\gamma^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow R^2 < 4L/C \quad (1.28)$$

$$p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega, \quad \text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (1.29)$$

Общее решение (1.23) записывается в виде:

$$y = \left(A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\omega t} \right) e^{-\gamma t}, \quad (1.30)$$

$$A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} = \frac{-\gamma + i\omega}{2i\omega} = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2i\omega}$$

$$A_1 = \frac{-p_1}{p_2 - p_1} = \frac{\gamma + i\omega}{2i\omega} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2i\omega}$$
(1.31)

а физическое решение есть:

$$y = \left\{ \frac{1}{2}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) + \frac{\gamma}{\omega} \cdot \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right\} e^{-\gamma t}$$
(1.32)

или:

$$y = \left[\cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right] \cdot e^{-\gamma t}$$
(1.33)

в) *пограничный случай*: $\gamma = \omega_0$.

В этом случае

$$R^2 = 4L/C \text{ и } p_{1,2} = -\gamma$$
(1.34)

Общее решение дифференциального уравнения записывается в виде:

$$y = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 t e^{-\gamma t}$$
(1.35)

Граничные условия:

$$y(0) = A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 1$$

$$y'(0) = -A_1 \gamma + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = \gamma$$
(1.36)

Таким образом, решение принимает вид:

$$y(t) = (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}$$
(1.37)

Выводы:

1. Величина отклика линейного осциллятора на внешнее воздействие прямо пропорционально величине этого воздействия.

2. Характер поведения линейного осциллятора не зависит от величины внешнего воздействия.

В. Математический маятник

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из частицы массой m , прикрепленной к нижнему концу жесткого стержня длиной l с пренебрежимо малой массой, верхний конец которого вращается без трения в точке подвеса. Если груз вывести из положения равновесия и отпустить, то маятник будет совершать колебания в вертикальной плоскости (рис. 2).

Поскольку движение частицы будет происходить по дуге окружности радиуса l с центром в точке O , то положение частицы характеризуется длиной дуги l и углом отклонения от вертикали θ .

В соответствии с основным законом динамики вращательного движения

$$J \frac{d\Omega}{dt} = K_z, \quad (1.38)$$

где J – момент инерции частицы с массой m , $\frac{d\Omega}{dt}$ – угловое ускорение вращения, Ω – угловая скорость вращения, K_z – проекция на ось вращения z (ось вращения проходит через точку подвеса O) момента силы, вызывающей вращение, уравнение движения математического маятника запишется в виде

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta, \quad (1.39)$$

Знак минус в правой части уравнения (1.39) указывает на то, что возникающий при увеличении угла отклонения θ момент силы K_z стремится уменьшить это увеличение. Уравнение (1.39) можно представить в виде

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.40)$$

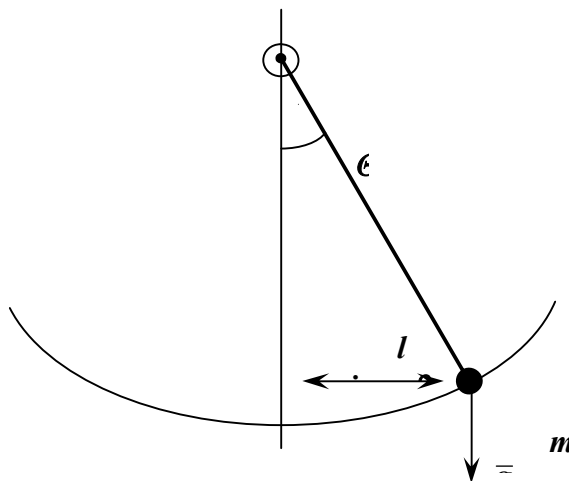


Рис. 2. Модель математического маятника

Уравнение (1.40) является примером *нелинейного однородного дифференциального уравнения второго порядка*, поскольку в него входит $\sin \theta$, а не θ . Большинство нелинейных диффе-

ренциальных уравнений не имеет аналитических решений в элементарных функциях, и (1. 40) не является исключением.

Однако, если амплитуда колебаний маятника достаточно мала, то $\sin \theta \approx \theta$, и (1. 40) можно переписать в виде

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (1. 41)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная частота, $\theta \ll 1$. То есть, **при малых углах отклонения от вертикали θ математический маятник является гармоническим осциллятором.**

Если сопоставить переменные y и θ , то уравнения (1. 7) и (1. 41) имеют одинаковый вид, и можно сразу сделать вывод, что для $\theta \ll 1$ период математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1. 42)$$

а зависимость $\theta(t)$ определяется выражением

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \theta^*), \quad (1. 43)$$

где константы θ_0 и θ^* определяются из начальных условий вида

$$\theta(t=0) = \theta_0, \quad \Omega(t=0) = \Omega_0. \quad (1. 44)$$

Один из способов получить представление о движении маятника в случае больших амплитуд ($\theta \gg 1$) – численно решить уравнение (1. 40)

С. Алгоритм Эйлера

Аналитическое решение уравнения (1. 18) представлено формулами (1. 27), (1. 33), (1. 37). Найдем численное решение *линейного* дифференциального уравнения (1. 18), чтобы впоследствии использовать его для решения *нелинейного* дифференциального уравнения (1. 40).

Разобьем временной интервал $(0, T)$ на n малых частей Δt ($n = T / \Delta t$). Здесь T – период функции(13). Пусть при $t_0 = 0$ $y = y_0$. Приближенное значение $y(t)$ в близлежащей точке $t_1 = t_0 + \Delta t$ можно найти по формуле

$$y_1 = y_0 + \Delta y \approx y_0 + \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} \Delta t. \quad (1. 45)$$

Можно повторить эту процедуру и найти значение y в точке $t_2 = t_1 + \Delta t$:

$$y_2 = y(t_1 + \Delta t) \approx y_1 + \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=t_1} \Delta t \quad (1.46)$$

Таким образом, приближенное значение функции в любой точке можно вычислить по итерационной формуле

$$y_n = y_{n-1} + v(t_{n-1})\Delta t, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.47)$$

Данный метод называется методом касательных или методом Эйлера. Метод будет давать хорошее приближение к истинному значению, если приращение аргумента Δt достаточно мало.

Чтобы строить решение по формуле (1.18), необходимо знать значение скорости v_n в каждый дискретный момент времени t_n . Для этого умножим дифференциальное уравнение (1.18) на dt и проинтегрируем уравнение в пределах от t_1 до t_2 при условии малости величины Δt :

$$\int_{t_1}^{t_2} dv + 2\gamma \int_{t_1}^{t_2} v dt + \omega_o^2 \int_{t_1}^{t_2} y dt = 0 \quad (1.48)$$

Приближенно результат интегрирования можно написать

$$v(t_2) - v(t_1) + 2\gamma v(t_1)\Delta t + \omega_o^2 y(t_1)\Delta t = 0 \quad (1.49)$$

или

$$v(t_2) = v(t_1) - 2\gamma v(t_1)\Delta t - \omega_o^2 y(t_1)\Delta t \quad (1.50)$$

Таким образом, приближенное значение функции $v(t)$ в любой точке $t_n = t_o + n\Delta t$ можно вычислить по итерационной формуле

$$v(t_n) = v(t_{n-1}) - 2\gamma v(t_{n-1})\Delta t - \omega_o^2 y(t_{n-1})\Delta t \quad (1.51)$$

Формулы (1.47) и (1.51) позволяют получить приближенное решение дифференциального уравнения (1.18) с заданными начальными условиями.

1. 2. Порядок выполнения работы

1. Написать программу приближенного решения дифференциального уравнения гармонического осциллятора в среде с вязким трением (1.6) с заданными начальными условиями (1.14). Построить графики функций $y(t)$, $v(t)$ и фазовую траекторию движения $v(x)$ при малых и больших значениях коэффициента затухания γ .

- Используя программу линейного осциллятора с затуханием из п. 1, построить графики функций $y(t)$, $v(t)$, $v(y)$ для линейного осциллятора без затухания.
- Используя программу линейного осциллятора с затуханием из п. 1, построить графики функций $\theta(t)$, $\Omega(t)$, $\Omega(\theta)$ для математического маятника для случая малых и больших амплитуд колебаний.

Указание

Ниже представлен алгоритм программы ***Oscillator*** линейного осциллятора с затуханием с применением пакета MathCad .

- Ввести параметры задачи ω_0, γ .
- Ввести ключевое слово **Given**
- Запишите само дифференциальное уравнение и его ограничения, использующие булевы операторы.
- Ввести начальные условия задачи y_0, v_0 .
- Используйте функцию **odesolve** для решения дифференциального уравнения по методу Рунге-Кутты.
- Построение графика зависимости $y=y(t)$.
- Построение графика зависимости $v=v(t)$.
- Построение графика фазовой траектории $v=v(y)$.

В приложении приведены листинги программ ***Oscillator-1***, ***Oscillator-2***, ***Oscillator-3*** в пакете MathCad для получения решения дифференциальных уравнений гармонического осциллятора в вакууме, гармонического осциллятора в среде с вязким трением и математического маятника (в вакууме), соответственно.

1. 3. Контрольные вопросы

- Дифференциальное уравнение линейного гармонического осциллятора с затуханием (*в среде с вязким трением*).
- Общее решение дифференциального уравнение линейного гармонического осциллятора без затухания. Решение с заданными начальными условиями. Фазовая траектория линейного гармонического осциллятора без затухания.
- Общее решение дифференциального уравнение линейного гармонического осциллятора с затуханием для случаев малого затухания в системе ($\gamma < \omega_0$), большого затухания в системе

($\gamma > \omega_0$) и пограничного случая ($\gamma = \omega_0$). Решения с заданными начальными условиями. Фазовая траектория линейного гармонического осциллятора с затуханием для случаев малого и большого затухания.

4. Дифференциальное уравнение линейного гармонического осциллятора с отрицательным затуханием. Общее решение. Фазовая траектория линейного гармонического осциллятора с отрицательным затуханием. Примеры физических систем с отрицательным затуханием.
5. Вывод нелинейного дифференциального уравнения для математического маятника. Численное решение этого уравнения с заданными начальными условиями. Фазовая траектория математического маятника при малых и больших углах отклонения маятника θ от вертикали.
6. Определить искажение гармонического осциллятора, вызванное наличием ангармонических поправок к потенциальной энергии:
а) $\delta U = (1/3)m\alpha y^3$, $\alpha = const$; б) $\delta U = (1/4)m\beta y^4$, $\beta = const$.
7. Определить искажение гармонического осциллятора без затухания, вызванное наличием ангармонической поправки к кинетической энергии:
$$\delta T = (1/2)m\gamma \dot{y}^2.$$
8. Сущность алгоритма Эйлера.

1. 4. Список литературы

1. Айзензон, А. Е. Курс физики : учебное пособие [Текст] / А. Е. Айзензон. – М. : Абрис, 2012. – 373 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. I. Механика [Текст] / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979. – 520 с.
3. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. III. Электричество [Текст] / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – 688 с.
4. Пул, Ч. Справочное руководство по физике [Текст] / Ч. Пул. – М. : Мир, 2001. – 461 с.
5. Горелик, Г. С. Колебания и волны [Текст] / Г. С. Горелик. – М. : Физматлит, 2007. – 653 с.
6. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн [Текст] / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М. : Наука, 1984. – 283 с.

7. Косевич, А. М. Введение в нелинейную физическую механику [Текст] / А. М. Косевич, А. С. Ковалев. – Киев: Наукова Думка, 1989. – 303 с.
8. Стокер, Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах [Текст] / Дж. Стокер. – М. : ИЛ, 1953. – 398 с.
9. Поршнев, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD [Текст] / С. В. Поршнев . – М. : Горячая линия – Телеком, 2002. – 252 с.
10. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях [Текст] / В. В. Амелькин. – М. : Наука, 1987. – 160 с.

ТЕМА № 2. Исследование экологической динамики в модели «хищник-жертва» Лотки-Вольтерры

Цель работы: моделирование экологической динамики в нелинейной модели системы двух дифференциальных уравнений «хищник-жертва» Лотки-Вольтерры.

2. 1. Теоретическое введение

А. Модель Лотки-Вольтерры

В 1925 г. В США выходит книга А. Дж. Лотки «Элементы физической биологии». В том же 1925 г. итальянский океанограф Умберто Д'Анконе ознакомил своего будущего тестя, выдающегося математика Вито Вольтерру со статистикой рыбных уловов в Адриатическом море.

В приводимой ниже таблице указана доля (в %) хрящевых рыб (хищников) от общего улова в двух портах на Адриатике.

	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Триест	5,7	8,8	9,5	15,7	14,6	7,6	16,2	15,4	–	19,9	15,8	13,3	10,7	10,2
Фиуме					11,9	21,4	22,1	21,2	36,4	27,3	16,0	15,9	14,8	10,7

Из статистики следовало, что в годы войны резко выросла доля хищных рыб в общем улове. Требовалось объяснить причины этого явления.

Непосредственное влияние войны сводилось только к уменьшению интенсивности лова, что, казалось бы, должно привести к пропорциональному росту численности всех видов рыб. Почему же для хищников это оказалось более благоприятным фактором?

Задумавшись над этим вопросом, Вольтерра стал искать математический подход к изучению изменений в составе биологических сообществ. Результатом его исследований стала вышедшая в 1931 году книга «Математическая теория борьбы за существование».

Книги Лотки и Вольтерры заложили основу *математической теории экологической динамики*.

Пусть $X(t)$ – численность популяции жертв (например, зайцев, обитающих в данном лесу) в момент времени t . X может меняться за счет естественного прироста и естественной смертности. Скорость как того, так и другого процесса пропорциональна X :

$$\frac{dX}{dt} = A_+ X - A_- X = k_1 X. \quad (2.1)$$

Здесь k – коэффициент воспроизводства, A_+ – коэффициент рождаемости, A_- – коэффициент смертности. Для живущих видов, как правило, $k_1 > 0$, иначе вид вымер бы.

Но в лесу живут хищники, например, лисы, которые поедают зайцев. Скорость поедания зайцев, очевидно, пропорциональна числу встреч зайцев с лисами, которое, в свою очередь, пропорционально как числу зайцев X , так и числу лис Y . Поэтому уравнение динамики популяции зайцев следует уточнить так:

$$\frac{dX}{dt} = k_1 X - k_2 XY. \quad (2.2)$$

Обратимся теперь к популяции лис. В отсутствии пищи (зайцев) она вымирала бы:

$$\frac{dY}{dt} = -k_3 Y. \quad (2.3)$$

Если зайцы есть, и если их едят, то в правую часть следует добавить положительное слагаемое, которое разумно предположить также пропорциональным числу встреч лис с зайцами, т. е.:

$$\frac{dY}{dt} = -k_3 Y + k_4 XY. \quad (2.4)$$

Величины k_1, k_2, k_3, k_4 являются параметрами данной экосистемы. Уравнения (2. 2) и (2. 4) в совокупности описывают модель «Хищник-жертва» Лотки-Вольтерры.

В. Равновесие в модели Лотки-Вольтерры.

Выясним, возможно ли в модели Лотки-Вольтерры равновесие, т. е. состояние системы, не меняющееся с течением времени:

$$\frac{dX}{dt} = 0; \quad \frac{dY}{dt} = 0. \quad (2.5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} k_1 X - k_2 XY &= 0, \\ -k_3 Y + k_4 XY &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система имеет два решения: тривиальное $X=0; Y=0$ и нетривиальное

$$Y = \bar{Y} = k_1 / k_2; X = \bar{X} = k_3 / k_4, \quad (2.7)$$

\bar{Y} и \bar{X} – равновесные численности популяций лис и зайцев.

Нетривиальное решение описывает ситуацию, когда естественная убыль популяции зайцев и поедание их лисами в точности компенсируется естественным приростом. С другой стороны, лисы поедают столько зайцев, чтобы выжить и произвести себе на смену потомство – не больше и не меньше, чем нужно для простого воспроизводства.

В реальном лесу такое точное равновесие вряд ли возможно. Год может быть засушливый или холодный, зайцев могут поедать волки, лис могут поедать хищные птицы и т. д. Возникает вопрос: как ведут себя популяции зайцев и лис при небольшом отклонении от равновесия?

Предположим, что численности зайцев и лис отличаются от равновесных значений:

$$X = \bar{X} + x; \quad Y = \bar{Y} + y \quad (2. 8)$$

причем отклонения от равновесия невелики:

$$x \ll \bar{X}; \quad y \ll \bar{Y} \quad (2. 9)$$

подставляя (2. 8) в (2. 2) и (2. 4), получаем :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1\bar{X} + k_1x - k_2\bar{X}\bar{Y} - k_2x\bar{Y} - k_2\bar{X}y - k_2xy = \\ &= (k_1 - k_2\bar{Y})x - k_2\bar{X}y - k_2xy \approx -k_2\bar{X}y \end{aligned} \quad (2. 10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -k_3\bar{Y} - k_3y + k_4\bar{X}\bar{Y} + k_4\bar{X}y + k_4x\bar{Y} + k_4xy = \\ &= (k_4\bar{X} - k_3)y + k_4\bar{Y}x + k_4xy \approx k_4\bar{Y}x \end{aligned} \quad (2. 11)$$

или:
$$\left\{ \begin{aligned} dx / dt &= -(k_2k_3 / k_4)y \\ dy / dt &= (k_1k_4 / k_2)x \end{aligned} \right\} \quad (2. 12)$$

Дифференцируя по времени первое уравнение системы (2. 12), имеем :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_2k_3}{k_4} \frac{dy}{dt} = -\frac{k_2k_3}{k_4} \cdot \frac{k_1k_4}{k_2} x = -k_1k_3x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0, \quad (2. 13)$$

где

$$\omega = \sqrt{k_1k_3} \quad (2. 14)$$

Аналогично, дифференцируя по времени второе уравнение (2. 12):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{k_1 k_4}{k_2} \frac{dx}{dt} = -\frac{k_1 k_4}{k_2} \cdot \frac{k_2 k_3}{k_4} y = -k_1 k_3 y \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (2.15)$$

Таким образом, при малых отклонениях от равновесия численности зайцев и лис должны колебаться вокруг средних значений с частотой, не зависящей от величины отклонения. Это иллюстрация общего правила, согласно которому малые колебания нелинейных систем вокруг равновесия с хорошей точностью являются линейными гармоническими колебаниями.

Почему вообще возникают эти колебания?

Предположим, что в силу каких-то обстоятельств (например, лес объявили заповедным и запретили охоту на зайцев), численность зайцев возросла. При этом создались благоприятные условия питания для лис, что приводит к росту их численности. Когда лис расплодится слишком много, они начинают поедать зайцев так интенсивно, что зайцев становится мало. Это приводит к ухудшению питания лис и, через некоторое время, к уменьшению их числа. При этом возникают более благоприятные условия для зайцев, которые начинают интенсивно размножаться. Через некоторое время популяция зайцев становится больше равновесного значения, и всё повторяется сначала.

Из этих рассуждений следует, что колебание числа хищников должны отставать от колебаний числа жертв. Действительно, пусть при $t = 0$

$$x = x_0, y = 0 \quad (2.16)$$

Из (2.16) следует, что

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (2.17)$$

Решение уравнения (2.13), отвечающее начальным условиям (2.16) и (2.17), есть

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad (2.18)$$

откуда:

$$y = -\frac{k_4}{k_2 k_3} \frac{dx}{dt} = \frac{k_4}{k_2 k_3} x_0 \omega \sin \omega t = \frac{k_4}{k_2} \sqrt{\frac{k_1}{k_3}} x_0 \sin \omega t = \frac{k_4}{k_2} \sqrt{\frac{k_1}{k_3}} x_0 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.19)$$

Таким образом, колебания числа лис оказываются действительно отстающими по фазе на четверть периода (рис. 3).

Колеблющиеся экологические системы реально наблюдаются в природе. Классический пример – наблюдавшиеся в Канаде хо-

рошо выраженные колебания в экосистеме «зайцы-рыси». Период их составлял девять-десять лет, и колебания численности зайцев, как и предсказывает теория, примерно на четверть периода опережают колебания численности рысей.

Конечно, эти колебания не описываются законом синуса или косинуса. Они так же не являются *малыми* колебаниями вокруг равновесных значений. Однако период и сдвиг по фазе выдерживаются удивительно хорошо!

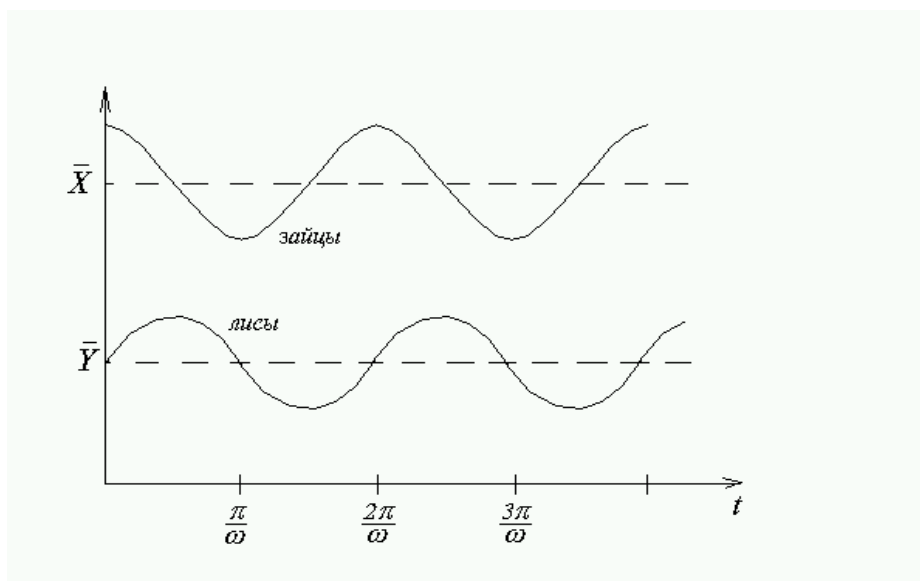


Рис. 3 – Колебания численности зайцев и лис при малых отклонениях от положения равновесия

С. Динамика роста с учетом ограниченности ресурсов. Логистическая кривая

Вернемся к модели Лотки-Вольтерры. Что будет в ней с зайцами, если внезапно лисы исчезнут?

$$\frac{dX}{dt} = k_1 X \Rightarrow X = X_0 e^{k_1 t}, \quad (2.20)$$

то есть по модели получается, что зайцы начнут неудержимо размножаться. Пройдет небольшое время, и в лесу некуда будет ступить от зайцев!

На самом деле, конечно, когда зайцев станет слишком много, рост их популяции замедлится – лес не сможет прокормить их

всех. Математически это означает, что коэффициент воспроизводства k_1 зависит от числа зайцев: чем больше X , тем меньше k_1 . Если X слишком велико, k_1 может даже стать отрицательным. Простейшая формула, описывающая такую зависимость $k_1(X)$, имеет вид

$$k_1 = \frac{r}{K}(K - X) \quad (2.21)$$

Уравнение динамики тогда запишется в виде:

$$\frac{dX}{dt} = rX \frac{(K - X)}{K} \quad (2.22)$$

Решение (предполагаем, что $X(0) = X_0 < K$):

$$\frac{dX}{X(K - X)} = \frac{dX}{K} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{K - X} \right) = \frac{r}{K} dt \quad (2.23)$$

$$\int_{X_0}^X \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{K - X} \right) dX = r \int_0^t dt \quad (2.24)$$

$$\ln \frac{X}{K - X} \Big|_{X_0}^X = rt \quad (2.25)$$

Окончательно, закон динамики можно представить в виде:

$$X(t) = X_0 \frac{e^{rt}}{\left(1 - \frac{X_0}{K}\right) + \frac{X_0}{K} e^{rt}} = K \frac{\frac{e^{rt}}{X_0} - 1 + e^{rt}}{\frac{K}{X_0} - 1 + e^{rt}} \quad (2.26)$$

Анализ зависимости (2.26):

- 1) при $t \rightarrow -\infty$ $X \rightarrow 0$
- 2) при $t \rightarrow +\infty$ $X \rightarrow K$
- 3) при $e^{rt} \ll K/X_0$ $X \approx X_0 e^{rt}$

Кривая, описываемая уравнением $y = \frac{ae^{kx}}{b + e^{kx}}$, называется логистической кривой. Она демонстрирует быстрый (экспоненциальный) рост на начальной стадии с последующей стабилизацией численности популяции на некотором уровне K , который называется *поддерживающей ёмкостью* среды (рис. 4).

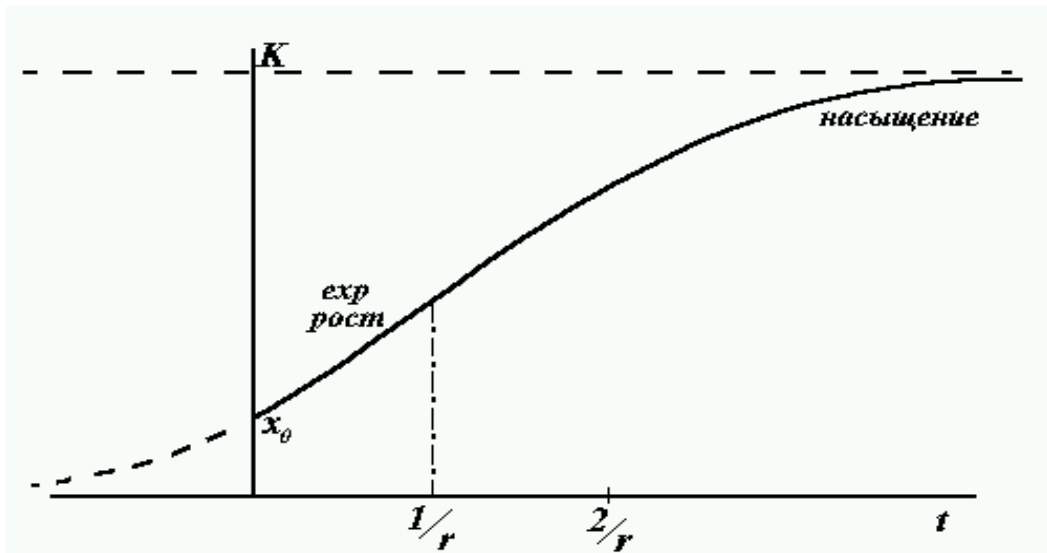


Рис. 4 – Зависимость численности популяции вида от времени в условиях ограниченности ресурсов (*логистическая кривая*)

Если численность популяции превышает поддерживающую ёмкость среды, то популяция будет уменьшаться ($X(0) = X_0 > K$):

$$rt = \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{K - X} \right) dX = \int_x^{x_0} \left(\frac{1}{X - K} - \frac{1}{X} \right) dX = \ln \left(\frac{X_0 - K}{X - K} \cdot \frac{X}{X_0} \right) \quad (2.27)$$

Зависимость численности популяции от времени получится такой:

$$X(t) = \frac{K}{1 - \left(1 - \frac{K}{X_0} \right) e^{-rt}} \quad (2.28)$$

График этой зависимости приведен на рис. 5.

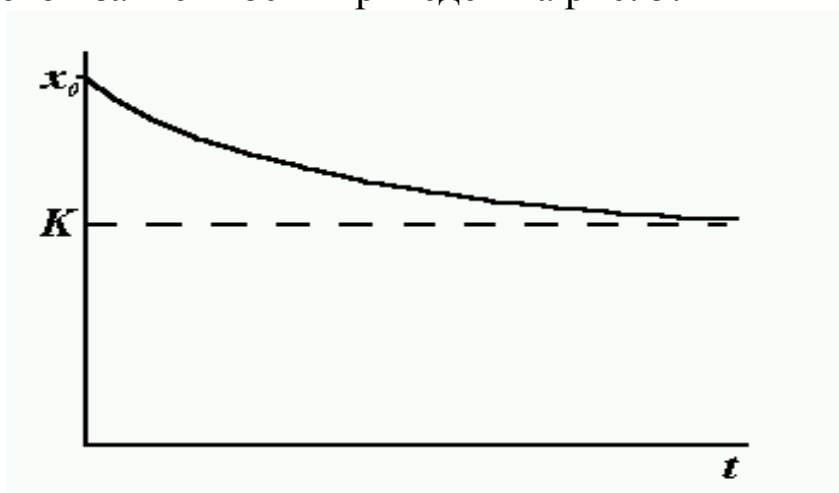


Рис. 5 – Зависимость численности популяции от времени, если численность популяции превышает поддерживающую ёмкость среды

Анализ зависимости (2. 28): при $t \rightarrow +\infty$ $X \rightarrow K$; при $t = 0$ $X \rightarrow X_0$.

Логистическая кривая возникает во многих задачах, которые рассматривают динамику роста в условиях ограниченности ресурсов. Рост научных знаний, народонаселения, производства при более внимательном рассмотрении описываются совокупностью логистических кривых, сменяющих одна другую, с разными поддерживающими емкостями среды и коэффициентом воспроизводства.

D. Приведение уравнений модели Лотки-Вольтерры к виду, удобному для численного решения

Введем новые безразмерные переменные по правилу:

$$\xi = \frac{X}{X}, \eta = \frac{Y}{Y} \quad (2. 29)$$

В переменных ξ и η система дифференциальных уравнений модели Лотки-Вольтерры (2. 2) и (2. 4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi(1-\eta)k_1 \\ \frac{d\eta}{dt} &= \eta(\xi-1)k_3 \end{aligned} \quad (2. 30)$$

Пусть $\beta = k_3 / k_1$. Если принять $k_3 = 1$, то $\beta = 1$.

Применяя к дифференциальным уравнениям системы (2. 2) и (2. 4) метод Эйлера, можно получить следующие итерационные формулы для вычисления переменных ξ и η :

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \xi_n + (1 - \eta_n)\xi_n \Delta t \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + \eta_n(\xi_{n+1} - 1)\beta \Delta t \end{aligned} \quad (2. 31)$$

2. 2. Порядок выполнения работы

Написать программу *LV-model* приближенного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, описываемой уравнениями (2. 2) и (2. 4) с заданными начальными условиями. Построить графики функций $X(t)$, $Y(t)$, $Y(X)$ при малых и больших отклонениях популяции зайцев и лис от их равновесных значений

Указание.

Ниже представлен алгоритм программы *LV-model* модели Лотки-Вольтерры с применением пакета MathCad.

1. Создание правой части системы нелинейных дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры в виде её символьной записи в вектор F .
2. Создать вектор начальных значений искомых функций.
3. Записать начальное и конечное значение независимой переменной-длительность переменной время- $t1$ и $t2$.
4. Представить результаты решения системы нелинейных дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры в графическом и табличном виде, используя функцию **rkfixed**.
5. Построение графика зависимости $X(t)$.
6. Построение графика зависимости $Y(t)$.
7. Построение графика фазовой траектории $Y(X)$.

В приложении приведен листинг программы *LV-model* решения системы нелинейных дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры.

2. 3. Контрольные вопросы

1. Сущность модели «хищник-жертва» Лотки-Вольтерры. Вид системы нелинейных дифференциальных уравнений модели Лотки-Вольтерры.
2. Равновесие в модели Лотки-Вольтерры.
3. Гармонические колебания как малые колебания в модели Лотки-Вольтерры.
4. Фазовый портрет в модели Лотки-Вольтерры.
5. Интеграл движения в модели Лотки-Вольтерры.
6. Динамика роста популяции вида с учетом ограниченности ресурсов. Логистическая кривая. Поддерживающая ёмкость среды.
7. Вид зависимости численности популяции от времени, если численность популяции превышает поддерживающую ёмкость среды.
8. Вывод итерационных формул для безразмерных численностей популяций зайцев и лис с применением алгоритма Эйлера.

2. 4. Список литературы

1. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1976. – 286 с.
2. Молчанов, А. М. Нелинейности в биологии [Текст] / А. М. Молчанов. – Пущино: Ин-т математических проблем биологии, 1992. – 222 с.

3. Рубин, А. Б. Биофизика. Кн. 1: Теоретическая биофизика [Текст] / А. Б. Рубин. – М. : Высшая школа, 1987. – 319 с.
4. Волькенштейн, М. В. Биофизика [Текст] / М. В. Волькенштейн. – М. : Наука, 1988. – 592 с.
5. Баблюянец, А. Молекулы, динамика, жизнь [Текст] / А. Баблюянец. – М. : Мир, 1990. – 373 с.
6. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах [Текст] / Г. Николис, И. Пригожин. – М. : Мир, 1979. – 512 с.
7. Поршневу, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD [Текст] / С. В. Поршневу. – М. : Горячая линия–Телеком, 2002. – 252 с.

ТЕМА № 3. Моделирование генератора Ван дер Поля

Цель работы: моделирование колебаний генератора Ван дер Поля при малых и больших значениях коэффициента нелинейности системы.

3. 1. Теоретическое введение

А. Осциллятор с затуханием, зависящим от амплитуды.

Проведенный в теме №1 анализ линейного осциллятора показал, что если затухание $\gamma > 0$, то энергия осциллятора *только* диссипируется, а его колебания затухают. Фазовые траектории при малых γ имеют вид сворачивающихся спиралей. Если же затухание $\gamma < 0$, то энергия осциллятора *только* возрастает, а его колебания *только* раскачиваются. Фазовые траектории при этом имеют вид раскручивающихся спиралей.

На практике часто встречаются колебательные системы, которые могут и получать энергию от некоторого источника, и диссипировать (рассеивать) её в окружающую среду. Диссипация обычно преобладает при больших амплитудах колебаний, а при малых – система получает энергии больше, чем отдает. Подобные системы можно моделировать уравнением осциллятора с переменным затуханием:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\gamma(y, v) \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (3. 1)$$

Зависимость $\gamma(y, v)$ должна быть такой, чтобы при малых амплитудах $\gamma < 0$, а при больших $\gamma > 0$, например:

$$\gamma(y, v) = \alpha(y^2 - A^2) \quad (3. 2)$$

$$\gamma(y, v) = \beta(v^2 - B^2) \quad (3. 3)$$

$$\gamma(y, v) = \mu(y^2 + \omega_0^2 v^2 - C^2) \quad (3. 4)$$

Очевидно, уравнение (3. 1) нелинейно. Таким образом, все эффекты, связанные с переменностью затухания γ – эффекты принципиально нелинейные, которые не имеют места для линейного осциллятора.

В. Фазовый портрет осциллятора с переменным затуханием. Предельный цикл

Если при больших амплитудах фазовый портрет системы представляет собой скручивающуюся спираль, радиус витков которой постоянно убывает, а при малых амплитудах – раскручивающуюся спираль, радиус витков которой постоянно возрастает, то нетрудно догадаться, что должен существовать замкнутый виток, разделяющий эти две спирали. Он называется ***предельным циклом***.

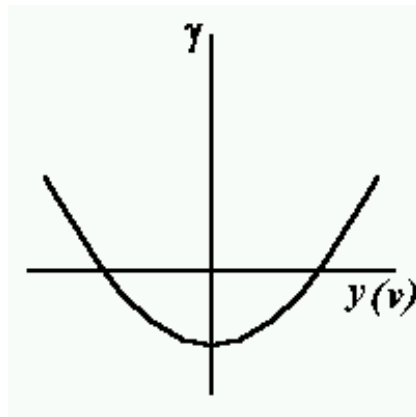


Рис. 6 – Пример зависимости коэффициента затухания осциллятора $\gamma(y, v)$ от амплитуды: при малых амплитудах $\gamma < 0$, а при больших – $\gamma > 0$

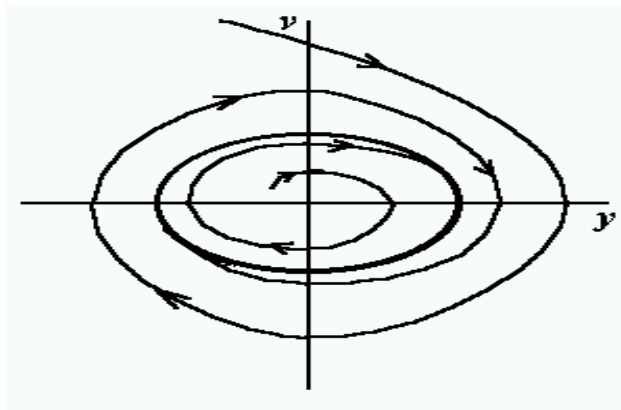


Рис. 7 – Предельный цикл (показан жирной линией)

Предельный цикл обладает следующими свойствами:

- 1) динамика системы на её предельном цикле является строго периодической (поэтому – *цикл*);
- 2) фазовая траектория выходит на предельный цикл независимо от начального состояния системы (поэтому – *предельный цикл*);

3) система, вышедшая на предельный цикл, имеет нулевой баланс энергии, то есть за один период она диссипирует ровно столько энергии, сколько получает её от источника;

4) форма предельного цикла и период колебаний на предельном цикле зависят только от характеристик системы, определяющих значения коэффициентов в уравнении динамики, но не от начальных условий и внешних воздействий.

Устойчивый предельный цикл, устойчивый фокус и устойчивый центр являются *аттракторами*.

Аттрактор – множество точек, к которому стремятся все фазовые траектории из окружающих областей фазового пространства.

Фокус и центр – аттракторы размерности ноль (точки). Предельный цикл – аттрактор размерности единица (линия).

Потрясающим открытием, сделанным в 60-е годы 20 века, было обнаружение у некоторых динамических систем аттракторов *дробной (нецелой) размерности*. Они получили название *странных аттракторов*.

С1. Автоколебания

Колебания, соответствующие предельному циклу системы с переменным затуханием, не являются свободными, поскольку требуют для своего поддержания внешнего источника энергии. Они не являются и вынужденными, поскольку их частота определяется только свойствами системы, но не частотой вынуждающей силы. Эти колебания, даже в первоначально покоившейся системе, возникают *сами по себе*. Это – *автоколебания*.

Автоколебания – незатухающие колебания в диссипативной нелинейной системе, поддерживаемые за счет энергии внешнего источника, параметры которых (амплитуда, частота, спектр) определяются свойствами самой системы и не зависят от начальных условий.

Примеры автоколебаний: а) часы-ходики; б) гул водопроводных труб при открывании крана; в) свист, игра на флейте, органе; г) биение сердца.

С2. Генератор Ван дер Поля.

Генератор Ван дер Поля (ГВдП) представляет собой радиотехническое устройство для получения электрических колебаний. ГВдП представляет собой колебательный контур, состоящий из активного сопротивления R , емкости C и индуктивности L , который включен между сеткой и катодом электронной лампы-триода (см. рис. 8). В анодную цепь триода (цепь от катода к аноду) включены анодная батарея E и индуктивность L' , намотанная поверх индуктивности L .

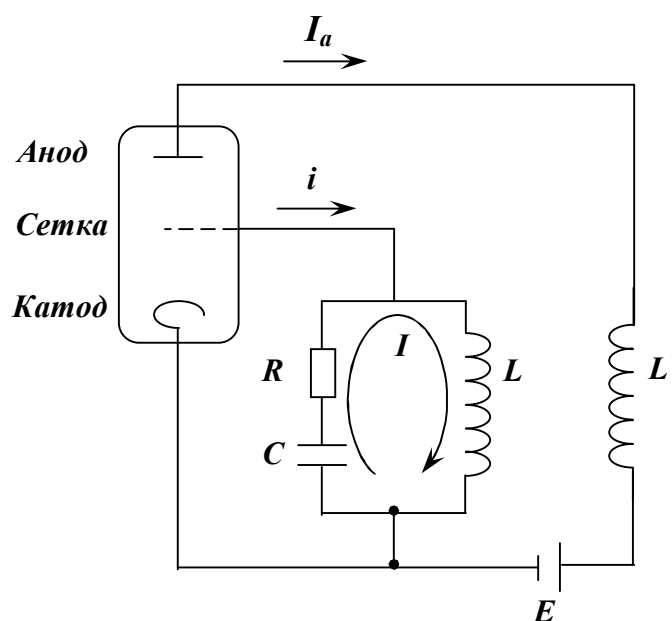


Рис. 8 – Электрическая схема генератора Ван дер Поля

Нелинейным элементом в ГВдП служит электронная лампа-триод. Ее основное свойство заключается в том, что малые изменения потенциала сетки U относительно катода сильно и нелинейно влияют на ток от катода к аноду (анодный ток I_a). Эта зависимость представляется анодно-сеточной характеристикой $I_a(U)$, типичный вид которой представлен на рис. 9.

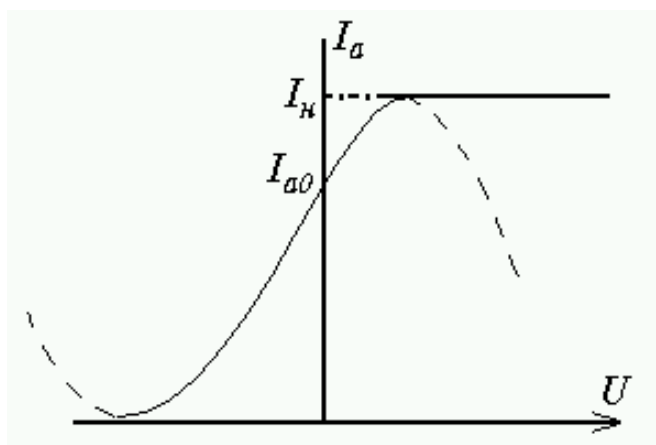


Рис. 9 – Анодно-сеточная характеристика триода

Для удобства анодно-сеточную характеристику описывают формулой

$$I_a(U) = I_0 + S_0 U - S_2 U^3 . \quad (3.5)$$

(пунктирные линии на рис 9). Здесь I_0, S_0, S_2 – параметры лампы.

Области, в которых уравнение (3. 5) существенно отличается от реальной характеристики лампы, обычно не достигаются при работе генератора.

Анодный ток I_a через взаимную индуктивность M влияет на колебательный контур. Если L и L' ориентированы так, что рост I_a ведет к положительной добавке к U , то говорят о положительной обратной связи между U и I_a (ПОС). Характеристикой ПОС является взаимная индуктивность M . Благодаря ПОС, колебания, случайно возникшие в контуре, усиливаются лампой, и их амплитуда растет за счет энергии, получаемой из источника питания. При большой амплитуде $I_a \rightarrow I_{\max}$ и дальнейший рост амплитуды дает лишь рост потерь в R . В итоге устанавливается стационарный режим колебаний, в котором все потери энергии в точности компенсирует анодная батарея.

В соответствии с уравнением Максвелла

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} . \quad (3.6)$$

Для колебательного контура имеем:

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = -M \frac{dI_a}{dt} . \quad (3.7)$$

Так как сеточный ток i очень мал по сравнению с током в колебательном контуре I , то весь ток в контуре – это ток разрядки конденсатора:

$$I = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dU}{dt}. \quad (3.8)$$

Знак минус в выражении (3. 8) указывает на то, что разрядка конденсатора C , уменьшающая U , приводит к положительному значению I при выбранном его направлении.

Далее,

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{dI_a}{dU} \frac{dU}{dt} = S(U) \frac{dU}{dt}. \quad (3.9)$$

Величина $S(U) = \frac{dI_a}{dU}$ называется крутизной характеристики лампы и для нее с помощью выражения (3. 5) можно получить

$$S(U) = S_0 - 3S_2U^2. \quad (3.10)$$

Сделаем замену переменной t в уравнении (3. 7) по правилу:

$$\tau = \omega_0 t. \quad (3.11)$$

В итоге получаем

$$\ddot{U} + \omega_0 [U^2 - V^2] \beta MS_2 \dot{U} + U = 0, \quad (3.12)$$

где

$$V = \sqrt{\frac{MS_0 - RC}{3MS_2}}. \quad (3.13)$$

Две точки и одна точка над переменной U означают вторую и первую производные соответственно по безразмерному времени τ . Величина в квадратных скобках представляет собой эффективное затухание системы. Нас интересует случай, когда при малых амплитудах колебаний U затухание отрицательно. Из (3. 12) следует, что для этого необходимо

$$MS_0 > RC. \quad (3.14)$$

Таким образом, колебания в колебательном контуре будут самовозбуждаться, если:

а) обратная связь, характеризуемая величиной M , положительна и достаточно велика;

б) крутизна характеристики лампы при малых анодных токах достаточно велика;

с) диссипация энергии в контуре, определяемая значением R , не слишком велика.

При $U^2 < V^2$ эффективное затухание отрицательно и система получает энергию. При $U^2 > V^2$ эффективное затухание положительно и система отдает энергию. Очевидно, что при автоколебаниях энергии, отдаваемые и получаемые в течение периода, равны. Для этого необходимо, чтобы величина U^2 колебалась вокруг значения V^2 . Таким образом, величина V характеризует амплитуду автоколебаний.

Перепишем (3. 12) для новой безразмерной переменной $x = U/V$:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} [x^2 - 1] = 0 \quad (3. 15)$$

Уравнение (3. 15) получило название **уравнение Ван дер Поля**. Здесь μ – параметр, характеризующий нелинейность:

$$\mu = 3MS_2\omega_0V^2 \quad (3. 16)$$

При $\mu = 0$ система эквивалентна линейному осциллятору без затухания; при $\mu \ll 1$ автоколебания по форме будут мало отличаться от гармонических; при $\mu \gg 1$ форма колебаний будет существенно отличаться от синусоидальной.

С3. Слабо нелинейные автоколебания.

Анализ методом возмущений

Если нелинейность слабая, то $\mu \ll 1$, то есть является *малым параметром*. Физики очень любят, когда в задаче есть малый параметр, потому что это позволяет рассматривать содержащее его слагаемое как слабое *возмущение* более простой задачи, не содержащей этого слагаемого. Так, при $\mu \ll 1$ второе слагаемое в уравнении Ван дер Поля является возмущением задачи $\ddot{x} + x = 0$, описывающей обычный линейный осциллятор.

Малость малого параметра обычно используется путем разложения искомого решения в ряд по степеням этого параметра. Делается это следующим образом. Искомое решение уравнения Ван дер Поля (3. 15) зависит, очевидно, как от τ , так и от μ :

$$x = x(\mu, \tau) \quad (3. 17)$$

Поскольку $\mu \ll 1$, то удобно разложить решение (3. 17) в ряд Тейлора по степеням μ :

$$x(\mu, \tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \mu^3 x_3(\tau) + \dots, \quad (3. 18)$$

где

$$x_1(\tau) = \left. \frac{\partial x(\mu, \tau)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}, \quad x_2(\tau) = \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 x(\mu, \tau)}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0} \quad \text{и т. д.} \quad (3. 19)$$

Благодаря малости μ , ряд (3. 18) обычно довольно быстро сходится.

Будем искать решение уравнения Ван дер Поля в виде ряда (3. 18), рассматривая коэффициенты ряда x_0, x_1, x_2, \dots как неизвестные функции, подлежащие определению. Подчеркнём, что *эти функции не должны меняться при изменении μ !*

Далее, нас будет интересовать не всякое, а только *периодическое* решение $x(\mu, \tau)$. Нетрудно сообразить, что ряд (3. 18) будет периодическим при любом μ лишь если периодичны (причем, с одним и тем же периодом) все его члены. Таким образом, мы должны потребовать, чтобы для всех значений i выполнялось следующее условие:

$$\forall i : x_i(\tau + T) = x_i(\tau), \quad (3. 20)$$

где T – (безразмерный) период колебания.

Кроме того, мы всегда можем в качестве нулевого момента времени выбрать момент, когда $x = 0$. Аналогично вышеизложенным соображениям, чтобы для любого μ выполнялось $x(\eta, \tau = 0) = 0$ необходимо:

$$\forall i : x_i(\tau = 0) = 0 \quad (3. 21)$$

Теперь можно подставить проект решения в виде ряда (3. 18) в уравнение (3. 15). Удерживая члены до квадратичного включительно, имеем:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 + \mu^2 \ddot{x}_2 + \dots + \mu(\dot{x}_0 + \mu \dot{x}_1 + \mu^2 \dot{x}_2 + \dots) \times \\ & \times (x_0^2 - 1 + 2x_0 x_1 \mu + (x_1^2 + 2x_0 x_2) \mu^2 + \dots) + x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots = \\ & = \mu^0 [\ddot{x}_0 + x_0] + \mu^1 [\dot{x}_1 + \dot{x}_0(x_0^2 - 1) + x_1] + \mu^2 [\ddot{x}_2 + x_2 + 2\dot{x}_0 x_0 x_1 + \dot{x}_1(x_0^2 - 1)] + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3. 22)$$

Ясно, что (3. 22) выполняется для любого μ в том и только в том случае, если равна нулю любая квадратная скобка:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (3.23)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \dot{x}_0(1 - x_0^2) \quad (3.24)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \dot{x}_1(1 - x_0^2) - 2\dot{x}_0x_0x_1 \dots \quad (3.25)$$

Формулы (3. 23–25) представляют собой рекуррентную систему дифференциальных уравнений.

Решение (3. 23) просто:

$$x_0 = A_0 \sin \tau + B_0 \cos \tau \Big|_{x_0(\tau=0)=0} \rightarrow A_0 \sin \tau \quad (3.26)$$

Подставляя (3. 26) в (3. 24), получаем:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = A_0 \cos \tau (1 - A_0^2 \sin^2 \tau) = A_0 \left(1 - \frac{1}{4} A_0^2\right) \cos \tau + \frac{1}{4} A_0^3 \cos 3\tau \quad (3.27)$$

Уравнение (3. 27) описывает колебания гармонического осциллятора с собственной частотой 1 под действием двух *вынуждающих сил*:

$$f_1(\tau) = A_0 \left(1 - \frac{1}{4} A_0^2\right) \cos \tau \quad (3.28)$$

$$f_2(\tau) = \frac{1}{4} A_0^3 \cos 3\tau \quad (3.29)$$

В силу линейности уравнения (3. 27), применим *принцип суперпозиции*, согласно которому

$$\begin{aligned} & x_1(\text{под действием } f_1 + f_2) = \\ & = x_1(\text{под действием только } f_1) + x_1(\text{под действием только } f_2) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Но сила f_1 имеет частоту 1, совпадающую с собственной частотой осциллятора. Она должна вызвать резонанс, при котором амплитуда колебаний будет неограниченно расти с течением времени. Такое решение не может быть периодическим. Получить периодическое решение можно лишь при условии, что амплитуда силы f_1 равна нулю. Отсюда

$$A_0 = 2; \quad x_0 = 2 \sin \tau \quad (3.31)$$

Таким образом, в нулевом приближении автоколебания слабо нелинейного осциллятора Ван дер Поля будут гармоническими с безразмерной амплитудой равной 2, то есть $U_{\max} = 2V$.

Обратим внимание, что в следующем порядке теории возмущений возникают вынужденные колебания x_1 с частотой, втрое

большей собственной частоты собственных колебаний LC -контура. Это типичная черта нелинейного осциллятора. Если линейный осциллятор всегда колеблется с частотой, равной частоте вынуждающей силы, то отклик нелинейного осциллятора содержит *обертоны* – колебания с частотой, кратной частоте основного тона (в данном случае – с частотой $3\omega_0$).

Напоследок заметим, что повторение процедуры, с помощью которой была определена константа A_0 , не позволяет определить амплитуду функции x_1 : в правой части уравнения (3. 25) не удаётся избавиться от слагаемых, вызывающих резонанс. В результате, в разложении (3. 18) амплитуда слагаемого $\sim \mu^2$ будет с течением времени неограниченно расти. Физическая причина этой математической трудности – в том, что *частота* нелинейных колебаний зависит от их амплитуды, и потому введение нелинейности, пусть даже малой, слегка изменит период колебаний. *Форма* фазовой траектории при этом может быть почти такой же, как для линейного осциллятора, однако *темп* движения фазовой точки по ней будет чуть иной. С течением времени разница в положениях будет накапливаться, и, оставаясь на одной кривой, изображающие точки для линейного осциллятора и нелинейного могут очень сильно разойтись вдоль неё. Чтобы учесть это обстоятельство следует в уравнении Ван дер Поля заменить частоту ω_0 на величину, зависящую от степени нелинейности ($\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \mu\omega_1 + \dots$), и находить поправки к частоте одновременно с поправками к динамической переменной x .

D. Релаксационные автоколебания

Итак, при $\mu \ll 1$ автоколебания представляют собой практически правильную синусоиду с амплитудой 2; динамика возбуждения автоколебаний при этом описывается спиралью, раскручивающейся из начала координат:

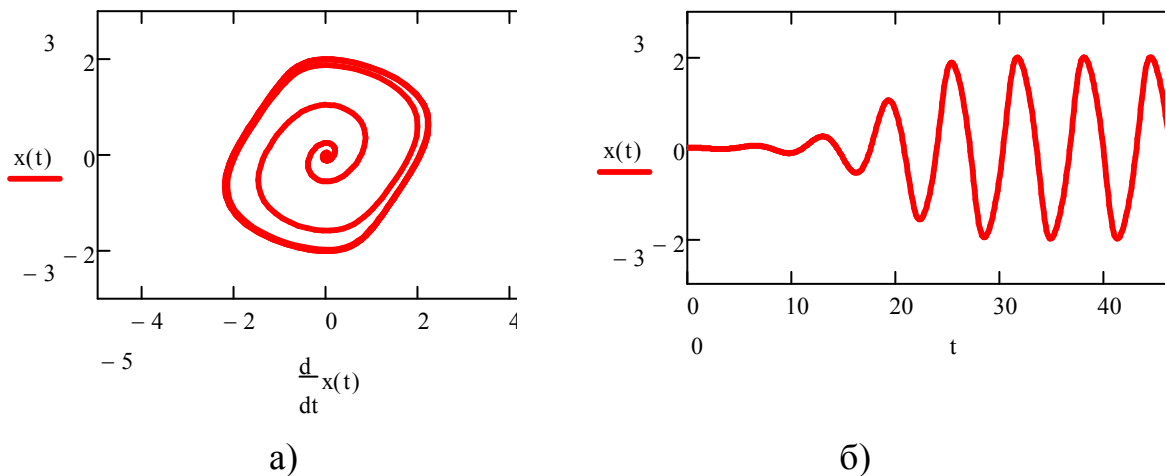


Рис. 10 – а) Зависимость обобщенной координаты ГВдП (нормированного сеточного напряжения) от обобщенной скорости (нормированного тока в колебательном контуре) б) Зависимость нормированного сеточного напряжения от времени. $\mu = 0,5$

При сильной нелинейности ($\mu \gg 1$) фазовый портрет генератора Ван дер Поля приобретает вид как на рис. 11а, а закон динамики – на рис. 11б.

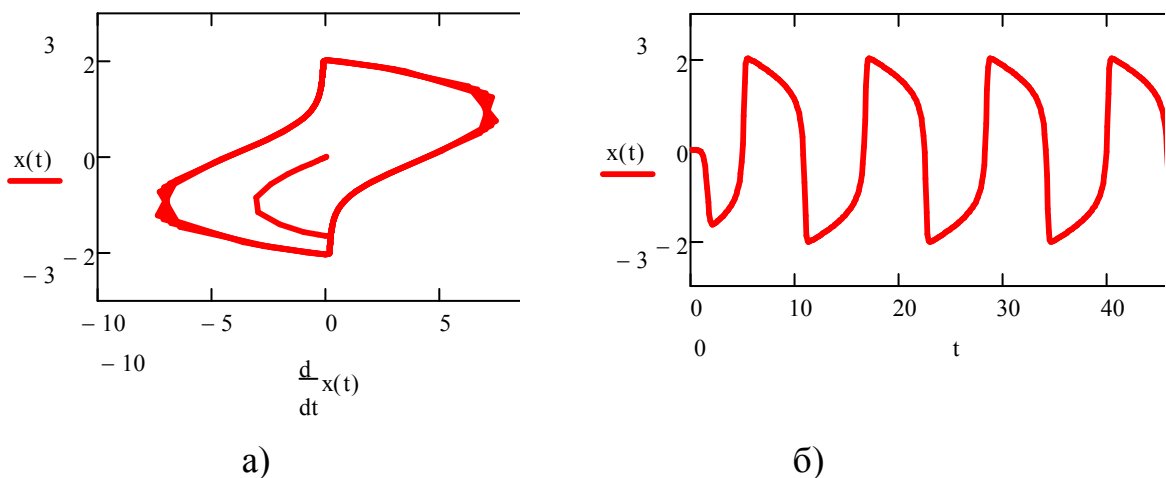


Рис. 11 – а) Зависимость обобщенной координаты ГВдП (нормированного сеточного напряжения) от обобщенной скорости (нормированного тока в колебательном контуре) б) Зависимость нормированного сеточного напряжения от времени. $\mu = 5$

В течение времени τ_1 (примерно от 5 сек до 8 сек) движение системы медленное, то есть ток в контуре мал, производная dx/dt мала, напряжение на конденсаторе $U = Vx$ велико. Быстро разрядиться конденсатор не может из-за большого эффективного затухания, пропорционального $\mu(U^2/V^2 - 1)$. Однако постепенно он все же разряжается, напряжение на нем падает, и наступает момент,

когда затухание становится малым и даже меняет знак (при $U^2 < V^2$). Процесс разрядки резко ускоряется, в контуре возникает сильный ток. В течение времени τ_2 (примерно от 8 сек до 12 сек) движение системы быстрое, dx/dt велика. При этом напряжение на конденсаторе доходит до нуля и продолжает расти до максимума, но с противоположным знаком. Затем все повторяется.

Нелинейные колебания, при которых периоды почти неизменного состояния системы чередуются с резкими скачками в другое состояние, называются релаксационными.

Релаксационные автоколебания допускают приближенное аналитическое описание, основанное на существовании двух характерных масштабов времени – большого τ_1 и малого τ_2 . Продемонстрируем это на примере автоколебаний, описываемых уравнением Рэля.

Е. Уравнение Рэля.

Разделение быстрых и медленных движений.

Нелинейное уравнение Рэля имеет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \mu \left(\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - 1 \right) \frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad (3.33)$$

Пусть $\mu \gg 1$. Введём новую переменную

$$\xi = x/\mu \Rightarrow x = \mu\xi \quad (3.34)$$

и «медленное время»

$$T = \tau/\mu \Rightarrow \tau = \mu T \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dT} \quad (3.35)$$

Подставляя (3.34) и (3.35) в (3.33), получаем уравнение

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{d^2\xi}{dT^2} + \left(\left(\frac{d\xi}{dT} \right)^2 - 1 \right) \frac{d\xi}{dT} + \xi = 0, \quad (3.36)$$

эквивалентное системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\xi}{dT} = v; \quad \frac{dv}{dT} = \mu^2 [v(1-v^2) - \xi]. \quad (3.37)$$

Из (3.37) видно, что если множитель в квадратных скобках не слишком мал, то v должна меняться очень быстро ($\sim \mu^2$). При этом производная

$$\frac{dv}{d\xi} = \mu^2 \frac{v(1-v^2) - \xi}{v} \quad (3.38)$$

велика. Другими словами, на быстрых участках фазовые траектории идут почти вертикально, и

$$\xi \approx const \quad (3.39)$$

Это уравнение «быстрых» движений.

Медленные движения возникают только при условии, что множитель в квадратных скобках второго уравнения в (3.37) близок к нулю, то есть

$$\xi \approx v(1-v^2) \quad (3.40)$$

Это уравнение «медленного» движения. Фазовая траектория, соответствующая (3.40) – траектория «медленных» движений – изображена на рис. 12. Направление движения по ней определяется первым уравнением (3.37). Координаты характерных точек $\pm \xi'$ определяются из уравнения

$$\frac{d\xi}{dv} = 1 - 3v^2 = 0 \quad (3.41)$$

откуда

$$v' = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (3.42)$$

$$\xi' = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (3.43)$$

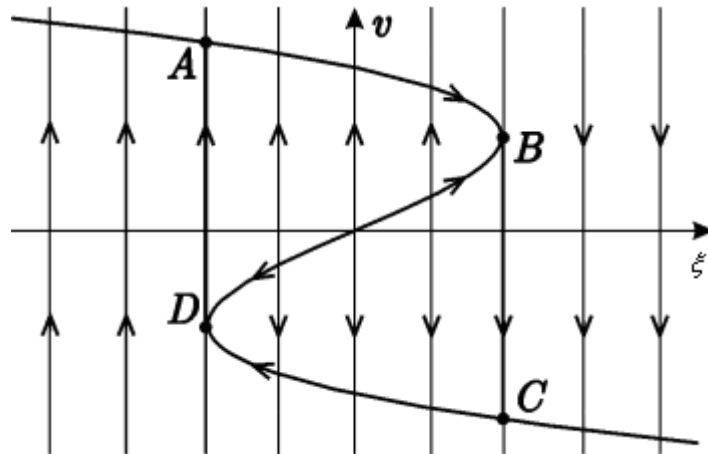


Рис. 12 – Фазовый портрет уравнения Рэля для релаксационных колебаний на основе приближенного анализа методом разделения быстрых и медленных движений

Медленное движение на участках АВ и DC *устойчиво*. Действительно, пусть на участке АВ $v = v_M(T)$, и в результате случайного внешнего толчка система получила малую дополнительную скорость Δv . Динамика дальнейшего изменения её скорости описывается вторым уравнением (3. 37) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT}(v_M + \Delta v) &= \frac{dv_M}{dT} + \frac{d(\Delta v)}{dT} = \mu^2 \left[(v_M + \Delta v) \left(1 - (v_M + \Delta v)^2 \right) - \xi \right] = \\ &= \mu^2 \left[v_M (1 - v_M^2) - \xi \right] + \mu^2 \Delta v (1 - 3v_M^2) - \mu^2 (\Delta v)^2 \cdot 3v_M - \mu^2 (\Delta v)^3 \end{aligned} \quad (3. 44)$$

откуда

$$\frac{d(\Delta v)}{dT} \approx \mu^2 (1 - 3v_M^2) \Delta v \quad (3. 45)$$

или

$$\frac{d}{dT} \ln |\Delta v| \approx \mu^2 (1 - 3v_M^2) \quad (3. 46)$$

Если $v_M^2 > 1/3$, то $\ln |\Delta v|$ с течением времени уменьшается, то есть уменьшается и Δv . Это означает, что фазовая траектория стремится к траектории «медленного» движения.

При $v_M^2 < 1/3$, очевидно, $\ln |\Delta v|$ с течением времени возрастает, то есть фазовые траектории стремятся покинуть окрестности траектории «медленного» движения. Участок ВD оказывается неустойчивым относительно «быстрого» движения!

Что же происходит с системой, когда она, двигаясь по устойчивой «медленной» траектории АВ подходит к точке В? В этой точке медленное движение теряет устойчивость и происходит переход к быстрому движению. Но уравнение быстрого движения есть $\xi \approx const!$ Таким образом, система начинает быстро двигаться по вертикали ВС до пересечения со второй устойчивой ветвью медленных движений, и т. д.

Вычислим *период* релаксационных автоколебаний. Быстрые участки ВС и АД вклада в него почти не дают, а медленные АВ и CD дают одинаковый вклад. Таким образом,

$$T = 2T_{AB} = 2 \int_A^B d\tau = 2\mu \int_A^B dT = 2\mu \int_A^B \frac{d\xi}{v} = 2\mu \int_A^B \frac{1-3v^2}{v} dv = 2\mu \left(\ln \frac{v_B}{v_A} + \frac{3}{2} (v_B^2 - v_A^2) \right) \quad (3. 47)$$

В итоге, для периода получаем следующее выражение:

$$T = (3 - 2 \ln 2) \mu \quad (3. 48)$$

Ф. Автоколебания в биологических системах.

Мы уже знакомы с одним примером колебаний в биологической системе – с моделью Лотки-Вольтерры. Однако таких примеров гораздо больше. Для биологических систем цикличность, периодичность поведения вообще является способом существования. Выдающийся специалист по математической биологии академик А. М. Молчанов указал, что это вытекает из одного факта длительной эволюции. За четыре с половиной миллиарда лет устойчивые системы должны были придти в равновесие с окружающей средой, стать её частью. Неустойчивые за это время давно распались. Единственным промежуточным вариантом являются системы колебательные, точнее говоря – *автоколебательные*, поддерживающие колебания за счёт потока энергии из окружающей среды.

Эволюция четыре с половиной миллиарда лет шла в условиях периодических изменений окружающей среды – суточных, сезонных. В результате эти ритмы должны были запечатлеться в самом устройстве, в физиологии животных и растений. Действительно, каждый организм имеет определенный ритм жизнедеятельности – *биологические часы*. Циклические колебания жизнедеятельности организмов с периодом, близким к суточному, называются *циркадными* (или циркадианными) *ритмами*.

Доказано, что циркадные ритмы не являются вынужденными колебаниями. Они записаны в геноме и продолжаются даже в условиях, когда ритмичность внешних воздействий нарушается (например, при перелётах между часовыми поясами, жизни в пещере или на космической станции). Период циркадных ритмов практически не зависит от температуры, освещённости и других факторов. Следовательно, эти ритмы отражают автоколебательные процессы в живых организмах.

Основу жизнедеятельности живых организмов составляет сложный комплекс биохимических реакций. Главное отличие этих реакций от тех, которые идут в неживой природе состоит в том, что все они эффективно идут только в присутствии *катализаторов-ферментов*. Возникает вопрос, присуща ли периодичность только организму в целом, возникает ли она на биологическом уровне, или периодическое поведение может быть свойственно и чисто химическим системам, не достигающим ещё био-

логического уровня сложности. Ответ на последний вопрос является положительным.

3. 2. Порядок выполнения работы

Написать программу *VDP-generator* приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения (3. 15) с заданными начальными условиями. Построить графики функций $x(\tau)$, $v(\tau)=\dot{x}(\tau)$, $v(x)$.

Указание

Ниже представлен алгоритм программы *VDP-generator* решения дифференциального уравнения Ван дер Поля с применением пакета MathCad.

1. Ввести параметр нелинейности задачи μ
2. Ввести ключевое слово **Given**
3. Запишите само дифференциальное уравнение и его ограничения, использующие булевы операторы.
4. Ввести начальные условия задачи x_0, v_0
5. Используйте функцию **odesolve** для решения дифференциального уравнения Ван дер Поля методом Рунге-Кутты.
6. Построение графика зависимости $x=x(t)$.
7. Построение графика зависимости $v=v(t)$.
8. Построение графика фазовой траектории $v=v(x)$.

В приложении приведен листинг программы *VDP-generator* решения уравнения Ван дер Поля в пакете MathCad.

3. 3. Контрольные вопросы

1. Уравнение осциллятора с затуханием, зависящим от амплитуды. Фазовые траектории при положительном и отрицательном затухании.
2. Предельный цикл осциллятора с переменным затуханием, его свойства. Аттрактор.
3. Определение автоколебаний.
4. Устройство генератора Ван дер Поля и принцип его работы.
5. Анодно-сеточная характеристика триода.
6. Вывод дифференциального уравнения генератора Ван дер Поля.
7. Условия самовозбуждения колебаний в колебательном контуре.
8. Решения дифференциального уравнения генератора Ван дер Поля при малых и больших значениях параметра нелинейности.

9. Фазовый портрет генератора Ван дер Поля.
10. Слабо нелинейные автоколебания. Анализ методом возмущений.
11. Релаксационные колебания.
12. Нелинейное дифференциальное уравнение Рэля. Разделение «быстрых» и «медленных» движений.
13. Фазовый портрет уравнения Рэля в случае релаксационных колебаний, на основе приближенного анализа методом разделения быстрых и медленных движений.
14. Вычисление периода релаксационных автоколебаний.
15. Автоколебания в биологических системах.
16. Модифицируйте программу *VDP-generator* таким образом, чтобы получить решения нелинейного уравнения Рэля.

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} [x^2 - 1] = 0 \quad (3.49)$$

3. 4. Список литературы

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. III. Электричество [Текст] / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – 688 с.
2. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях [Текст] / В. В. Амелькин. – М. : Наука, 1987. – 160 с.
3. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 710 с.
4. Матвеев, Н. Н. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Н. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1967. – 567 с.
5. Стокер, Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах [Текст] / Дж. Стокер. – М. : ИЛ, 1953. – 398 с.
6. Мун, Ф. Хаотические колебания [Текст] / Ф. Мун. – М. : Мир, 1990. – 312 с.
7. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн [Текст] / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М. : Наука, 1984. – 283 с.
8. Кринский, В. И. Автоволны [Текст] / В. И. Кринский, А. С. Михайлов. – М. : Знание, 1984. – 64 с.
9. Поршневу, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD [Текст] / С. В. Поршневу. – М. : Горячая линия–Телеком, 2002. – 252 с.
10. Гулд, Х. Компьютерное моделирование в физике. Ч. 1 [Текст] / Х. Гулд, Я. Тобочник. – М. : Мир, 1990. – 349 с.

ТЕМА №4. Исследование отображения Ферхюльста

Цель работы: моделирование простого одномерного нелинейного дискретного отображения Ферхюльста.

4. 1. Теоретическое введение

Обозначим через P_i численность популяции в i -том поколении. Простую модель развития популяции можно представить в виде

$$P_{i+1} = \lambda P_i, \quad (4. 1)$$

где $\lambda = const, \lambda > 0, i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Это линейное уравнение описывает геометрический рост популяции. В более реалистической модели численность популяции ограничивается возможностями окружающей среды, и

$$P_{i+1} = \lambda P_i - \mu P_i^2 = P_i(\lambda - \mu P_i). \quad (4. 2)$$

Второе слагаемое в (4. 2) описывает уменьшение естественного прироста с ростом численности популяции (нагрузки на окружающую среду).

Нормируем численность популяции в соответствии с правилом

$$P_i = \frac{\lambda}{\mu} x_i. \quad (4. 3)$$

Для нормированной численности популяции получаем уравнение

$$x_{i+1} = \lambda x_i(1 - x_i). \quad (4. 4)$$

Это и есть **одномерное нелинейное дискретное отображение Ферхюльста**. Уравнение (4. 4) в литературе еще называют *логистическим уравнением* или *квадратичным итератором*. Величину $r = \lambda/4$ в литературе принято называть параметром роста. (4. 4) можно представить в виде

$$x_{i+1} = f(x_i), \quad (4. 5)$$

$$f(x) = 4rx(1 - x). \quad (4. 6)$$

Заметим, что если $x_i > 1$, то $x_{i+1} < 0$. Поэтому, во избежание нефизических ситуаций, наложим ограничения на переменную x и параметр роста r :

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (4.7)$$

Значение x_0 называют источником отображения или стартовым значением, а значения x_i – итерированными значениями отображения.

В большинстве случаев несколько начальных итераций ведут себя нерегулярным образом, но потом устанавливается некоторая закономерность. Начальный отрезок последовательности называется переходным режимом, а остальная часть называется установившимся режимом. Последовательность значений x_i называется орбитой отображения.

Точка x^* называется неподвижной точкой отображения (4.4), если $x^* = f(x^*)$, т. е. если $x_i = x^*$, то все x_n при $n > i$ также равны x^* .

Так же, как и для непрерывных систем, неподвижные точки дискретного отображения могут быть устойчивыми и неустойчивыми.

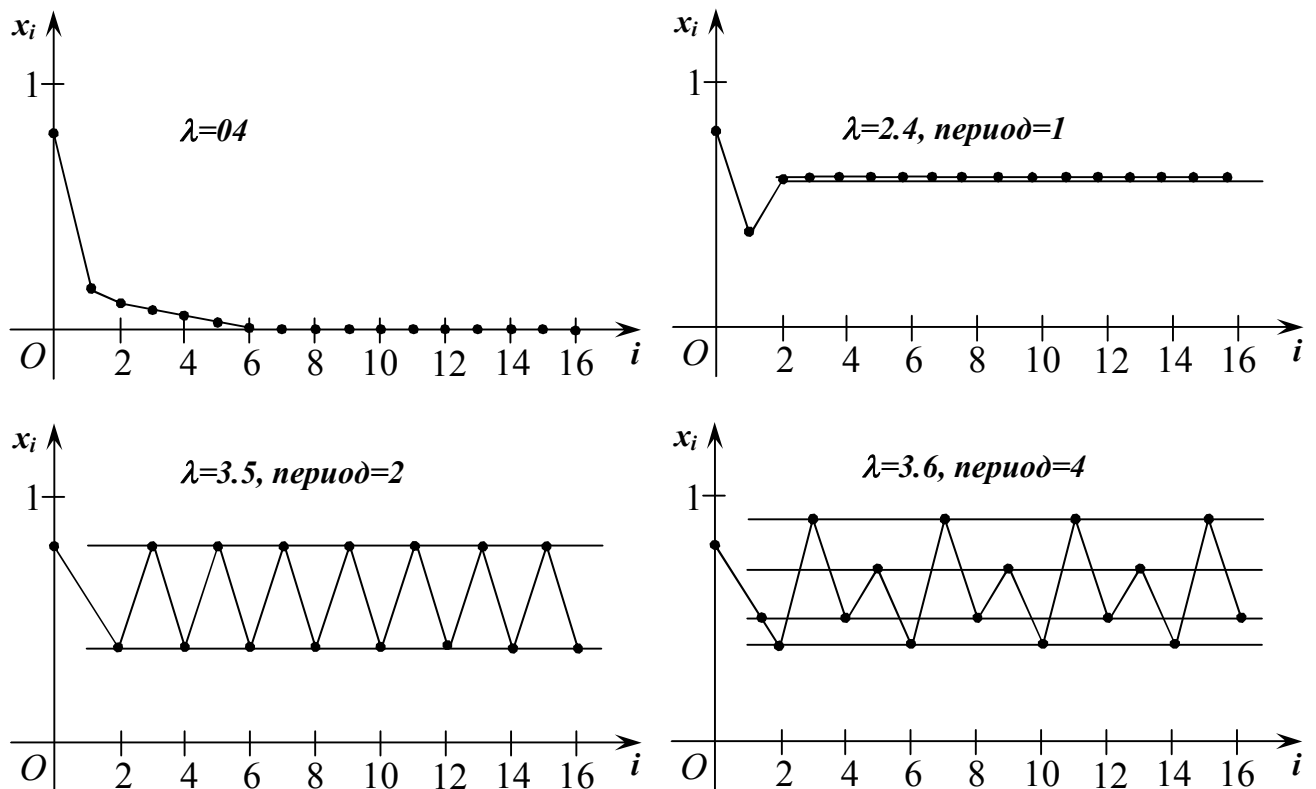


Рис. 13 – Графики итерированных значений x_i в зависимости от номера итерации i для случаев $\lambda=0.4, \lambda=2.4, \lambda=3.5, \lambda=3.6$ (схематично)

Неподвижная точка x^* будет устойчивой точкой, если последовательность (x_n) будет сходиться к неподвижной точке x^* . В этом случае величина $|M| < 1$, где $M = \left[\frac{df(x)}{dx} \right]$ при $x = x^*$, т. е. наклона

касательной к функции $f(x)$ в точке $x = x^*$ должен быть меньше 45° . Если же $|M| > 1$, то отклонение точки x_i от x^* с каждым шагом итерации увеличивается в M раз и неподвижная точка x^* неустойчива. В этом случае наклон касательной к функции $f(x)$ в точке $x = x^*$ будет уже более 45° .

Циклом порядка m дискретного отображения $x_{i+1} = f(x_i)$ называется такая последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, что

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_m = f(x_{m-1}), x_1 = f(x_m). \quad (4.8)$$

Рассмотрим отображение Ферхюльста (4.4). Оно имеет две неподвижные точки: $x^* = 0$ и $x^* = (\lambda - 1)/\lambda$. Точка $x^* = 0$ является устойчивой неподвижной точкой при $|\lambda| < 1$. Точка $x^* = (\lambda - 1)/\lambda$ устойчива при $1 < \lambda < 3$.

- А. Если принять значение r равным 0.1 ($\lambda = 0.4$) и стартовать из любой точки $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 1$, то нетрудно видеть, что итерационный процесс сходится к неподвижной точке $x^* = 0$ (рис. 13). Эта неподвижная точка устойчива. Говорят, что она образует аттрактор с периодом, равным 1 .
- В. Если принять значение r равным $r = 0.6$ ($\lambda = 2.4$) и итерации начинать из любой точки источника $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 1$, то нетрудно увидеть, что итерационный процесс сходится к неподвижной точке $x^* = 7/12$ (рис. 13). Она также является аттрактором с периодом 1 .
- С. Если параметр r становится чуть больше 0.75 ($\lambda > 3$), то после переходного режима x осциллирует между двумя значениями x_1^* и x_2^* (рис. 13). Вместо устойчивого цикла с периодом 1 , соответствующего одной неподвижной точке, у системы появляется устойчивый цикл с периодом 2 . Расщепление одной неподвижной точки на несколько (в данном случае на две) называют бифуркацией. Неподвижные точки x_1^* и x_2^* образуют устойчивый аттрактор с периодом 2 , т. е. в этом случае каждая вторая итерация принимает то же самое значение, и $x_i = f[f(x_i)]$. Можно сказать, что аттракторы функции $f(x)$ являются неподвижными точками функции $g(x) = f(f(x)) = f^2(x)$.
- Д. Пусть $0.75 < r < 1$ ($3 < \lambda < 4$). При дальнейшем росте r величина наклона касательной в неподвижных точках $g(x)$ достигает значения равного 1 , и неподвижные точки удваиваются.

Теперь период функции f становится равным 4 (рис. 13), то есть возврат к исходному значению происходит на каждой четвертой итерации. По мере роста r происходит удвоение периода по схеме

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow \text{и т. д.}$$

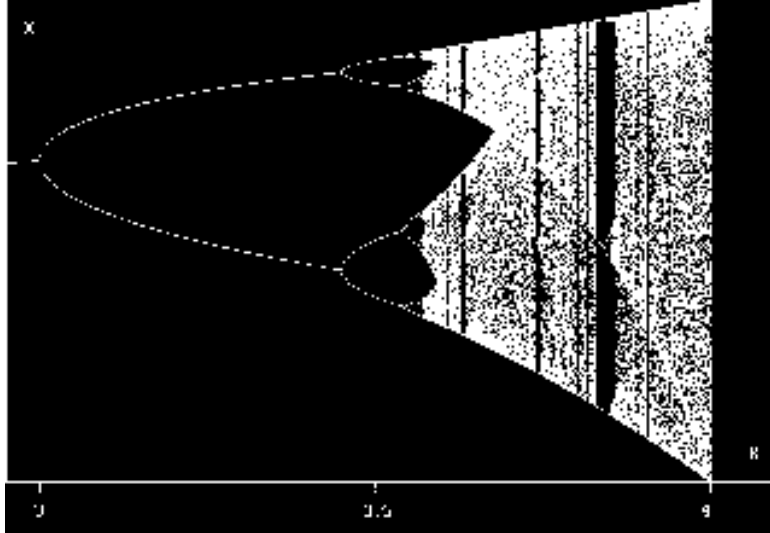


Рис. 14 – График итерированных значений x_i в зависимости от параметра роста r . Получено с помощью пакета QuickBasic

Фейгенбаум показал, что величина δ , определяемая как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} = \delta = 4.6692016 \quad (4.9)$$

есть *универсальная постоянная*, не зависящая от конкретного вида $f(x)$. Это число измерялось экспериментально на ряде физических систем, демонстрирующих удвоение периода. Такие системы известны в гидродинамике (H_2O , He , Hg), электронике (диоды, транзисторы), лазерной технике, физике твердого тела (джозефсоновские переходы) и акустике (He).

При $r > r_c = 0.892486$ каскад удвоений заканчивается переходом к хаотическому режиму (светлая область на графике). Следует отметить, что внутри областей хаоса имеются узкие окна периодического движения.

4. 2. Порядок выполнения работы

В приложении приведен листинг программы *FERHULST-graph* построения графика зависимости численности популяции

от времени в соответствии с решением (4. 12) при разных начальных условиях $Y(0) = Y_0$ и параметра роста λ с применением пакета MathCad .

1. С помощью программы ***FERHULST-graph*** покажите графически, что:

- а) при $r < 0.75$ у функции существует единственная устойчивая неподвижная точка;
- б) при $0.75 < r < 0.862$ у функции существуют две единственные устойчивые неподвижные точки;
- в) при $0.862 < r < 0.88$ у функции существуют четыре единственные устойчивые неподвижные точки;
- г) при $r > 0.892486$ у функции происходит переход к хаотическому режиму, причем внутри области хаоса, например при $r=0.9575$, у функции вновь наступает периодический режим.

2. Используйте программу ***FERHULST-graph*** и определите приближенное значение универсальной постоянной Фейгенбаума для отображения Ферхюльста.

3. Модифицируйте программу ***FERHULST-graph*** для построения графика зависимости значения функции f от параметра роста r отображения Ферхюльста и таких отображений как:

- а) $f(x) = x \exp(r(1 - x))$ (отображение Мэйя);
- б) $f(x) = (r - (2x - 1)^4)$.

4. 3. Контрольные вопросы

1. Одномерное отображение Ферхюльста. Параметр роста отображения.
2. Неподвижные точки дискретного отображения и их устойчивость.
3. Определение цикла дискретного отображения. Понятие аттрактора с периодом 1, 2 и т. д.
4. Вид графика итерированных значений x отображения Ферхюльста в зависимости от параметра роста отображения r .
4. Определение универсальной постоянной Фейгенбаума δ .
5. Вид графика итерированных значений x_i отображения Ферхюльста в зависимости от номера итерации i при $4r < 1$, $3 < 4r < 4$.

4. 4. Список литературы

1. Пайтген, Х. О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем [Текст] / Х. О. Пайтген, П. Х. Рихтер. – М. : Мир, 1993. – 173 с.
2. Лоскутов, А. Ю. Введение в синергетику [Текст] / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. – М. : Наука, 1990. – 272 с
3. Берже, И. Порядок в хаосе [Текст] / И. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М. : Мир, 1991. – 368 с.
4. Дмитриев, А. С. Генерация хаоса [Текст] / А. С. Дмитриев, Е. В. Ефремова, А. И. Панас, Н. А. Максимов. – М. : Техносфера, 2012. – 424 с.
5. Томпсон, Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике [Текст] / Дж. М. Т. Томпсон. – М. : Мир, 1985. – 254 с.
6. Гулд, Х. Компьютерное моделирование в физике. Ч. 1 [Текст] / Х. Гулд, Я. Тобочник. – М. : Мир, 1990. – 349 с.
7. Гулд, Х. Компьютерное моделирование в физике. Ч. 2 [Текст] / Х. Гулд, Я. Тобочник. – М. : Мир, 1990. – 400 с.
8. Поршневу, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD [Текст] / С. В. Поршневу . – М. : Горячая линия–Телеком, 2002. – 252 с.
9. Зельднер, Г. Программируем на языке Quik BASIC 4. 5 [Текст] / Г. Зельднер. – М. : ABF, 1997. – 432 с.

ТЕМА № 5.

Исследование множеств Жюлиа и Мандельброта

Цель работы: моделирование нелинейных множеств Жюлиа и Мандельброта.

5. 1. Теоретическое введение

А. Квадратичное отображение комплексной плоскости

Пусть $z = x + iy$ комплексное число. Отображение вида

$$z_{n+1} = z_n^2 + C \quad (5. 1)$$

называют квадратичным отображением комплексной плоскости. Здесь $z_n = x_n + iy_n$, $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $C = C' + iC''$ – комплексная константа. Поскольку $z_n^2 = x_n^2 - y_n^2 + 2ix_ny_n$, то комплексное отображение (5. 1) можно заменить вещественным двумерным отображением

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + C' \\ y_{n+1} = 2x_ny_n + C'' \end{cases} \quad (5. 2)$$

В. Динамика отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ при $C = 0$

В тригонометрической форме отображение $z_{n+1} = z_n^2 + C$ при $C=0$ можно представить в виде

$$z_{n+1} = z_n^2 = |z_n|^2 \exp(2i\varphi). \quad (5. 3)$$

Очевидно, что $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $|z_1| < 1$ и $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, если $|z_1| > 1$. Говорят, что отображение (5. 3) имеет два аттрактора – точки $z=0$ и $z=\infty$. Круг $|z| < 1$ называется бассейном первого аттрактора. Вся остальная область комплексной плоскости называется бассейном второго аттрактора.

С. Неподвижная точка отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$

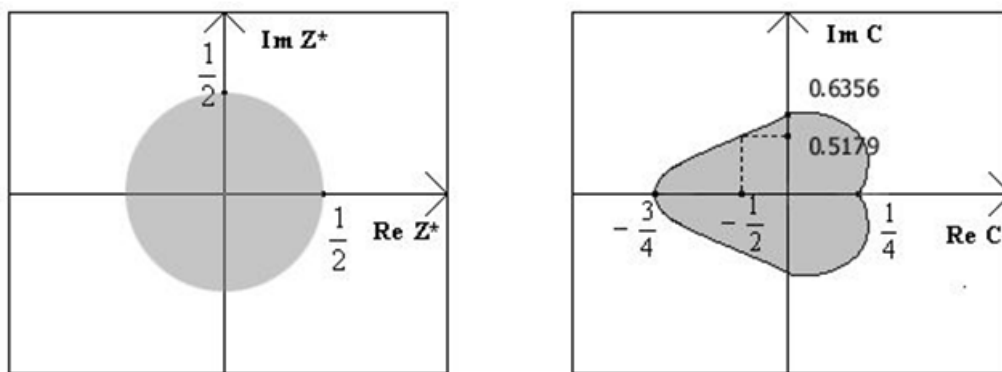
Точка z^* называется неподвижной точкой отображения $z_{n+1} = f(z_n)$, если $z^* = f(z^*)$. Неподвижная точка отображения (5. 1) выражается через комплексный параметр C следующим образом:

$$z_{1,2}^* = 0.5(1 \pm \sqrt{1 - 4C}). \quad (5. 4)$$

Нетрудно показать, что условие устойчивости двумерного отображения (5. 1) оказывается таким же, что и для одномерного:

$$\left| \frac{df}{dz} \right|_{z=z^*} = 2|z^*| < 1 \quad \text{или} \quad |z^*| < 1/2. \quad (5.5)$$

Последняя запись означает, что областью устойчивости неподвижной точки z^* является круг с радиусом $1/2$ (рис. 15а). На плоскости же комплексной переменной C область, для которой $|z^*| < 1/2$ будет представлять собой кардиоиду (рис. 15б). Если C внутри кардиоиды, то существует устойчивая неподвижная точка, к которой притягивается последовательность, стартующая с не слишком больших z . Если же C вне кардиоиды, последовательность (z) неизбежно уйдет на бесконечность.



а)

б)

Рис. 15 – а) область устойчивости неподвижной точки z^* на плоскости комплексной переменной z ; б) та же область устойчивости z^* на плоскости комплексной переменной C

D. Множество Жюлиа и его компьютерное построение

Рассмотрим область комплексной переменной z , ограниченную неравенствами

$$\begin{cases} -1.5 \leq \operatorname{Re} z = x \leq 1.5 \\ -1.5 \leq \operatorname{Im} z = y \leq 1.5 \end{cases} \quad (5.6)$$

Выберем решетку точек этой области с определенным шагом.

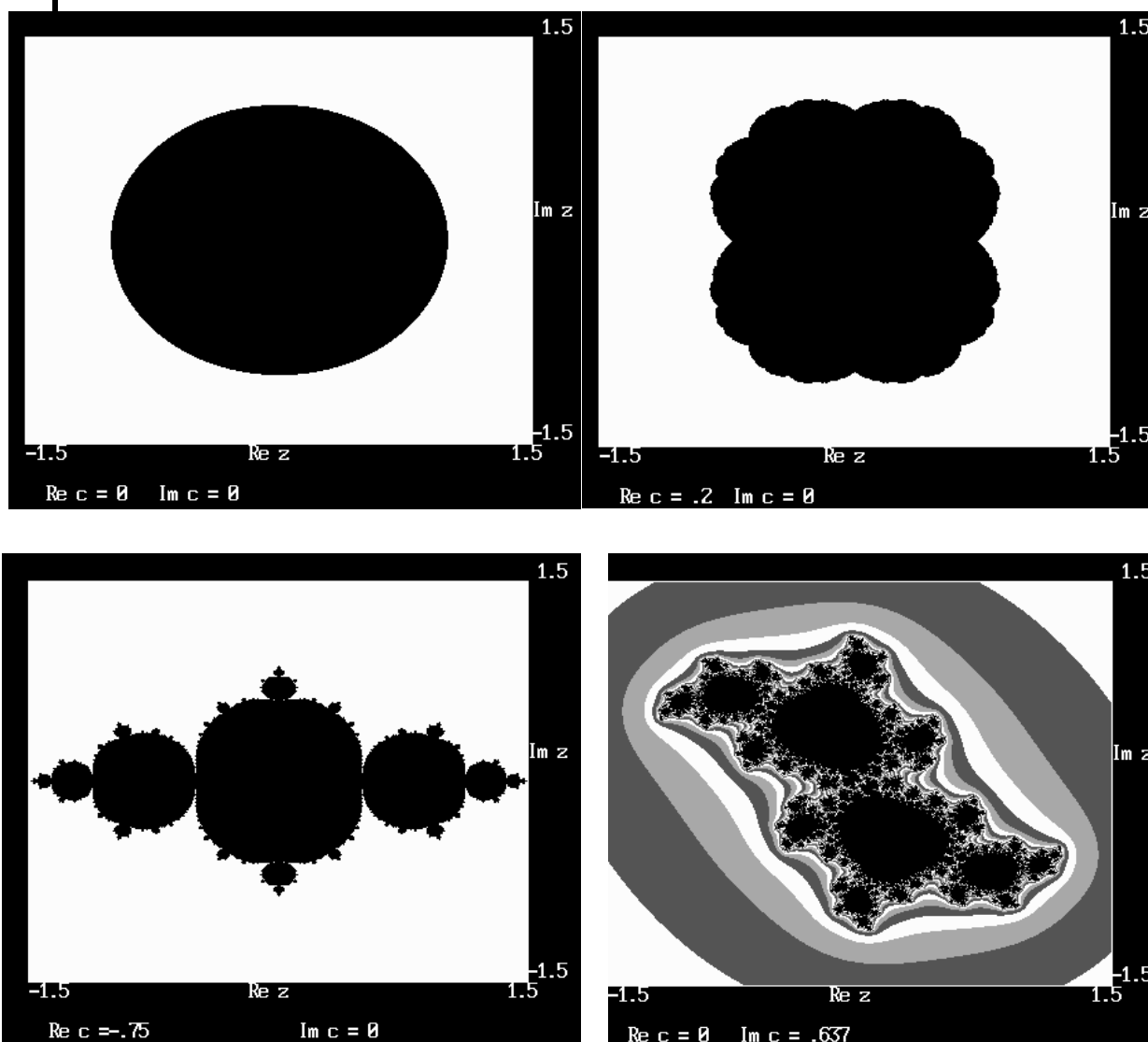
Зададим на плоскости z (плоскости xOy) круг некоторого конечного радиуса R , который назовем радиусом убегания. Зададимся фиксированным значением комплексного параметра C . Теперь для этого C исследуем каждую точку решетки в области (5.6) следующим образом.

Возьмем в качестве источника итераций точку (x_0, y_0) . Если за достаточно большое число итераций N последовательность (5.2)

выйдет за пределы радиуса убегания ($x_N^2 + y_N^2 > R^2$), будем считать, что источник (x_0, y_0) принадлежит бассейну бесконечно удаленной точки. Окрасим такие точки, например, в белый цвет. Если же за N итераций последовательность (5. 2) не выйдет за пределы радиуса убегания ($x_N^2 + y_N^2 < R^2$), то считаем, что источник (x_0, y_0) не принадлежит бассейну бесконечно удаленной точки, и такие стартовые точки окрашиваем, например, в черный цвет.

После исследования всех точек области (5. 6) каждая из них станет «белой» или «черной», как показано на рис. 16.

Точки комплексной области z , принадлежащие границе бассейна бесконечно удаленной точки при заданном значении параметра C , образуют множество Жюлиа для данного значения C .



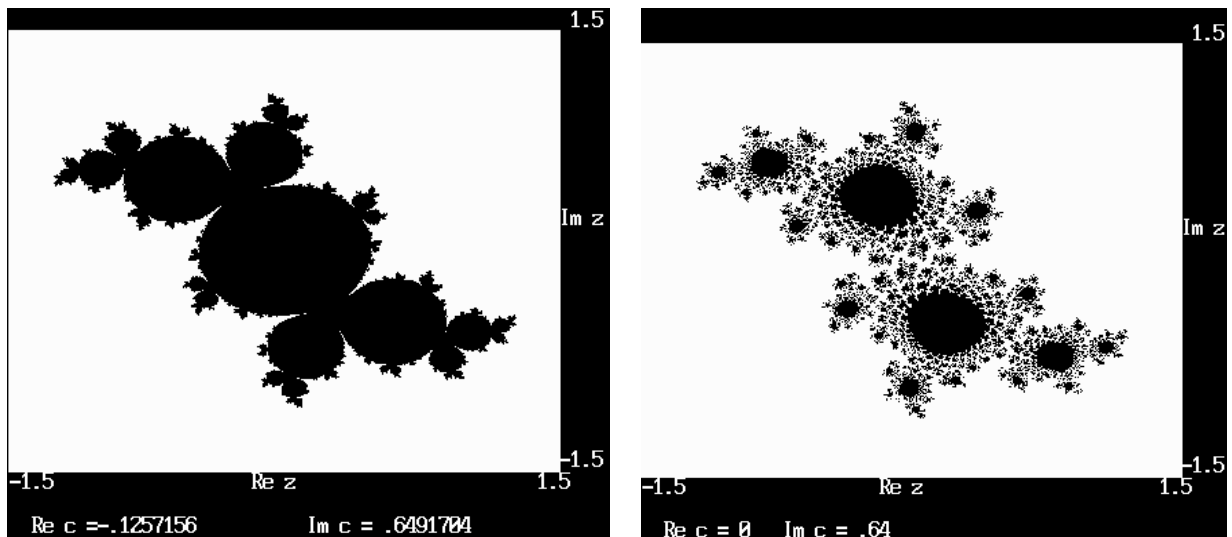


Рис. 16 – Различные формы множества Жюлиа, полученные с помощью пакета QuickBasic

Как видно из рис. 16, при $C = 0$ множество Жюлиа – окружность. При $C \neq 0$ множество Жюлиа – деформированная окружность. С приближением комплексного параметра C к границе кардиоиды граница бассейна становится все более изрезанной (рис. 17).

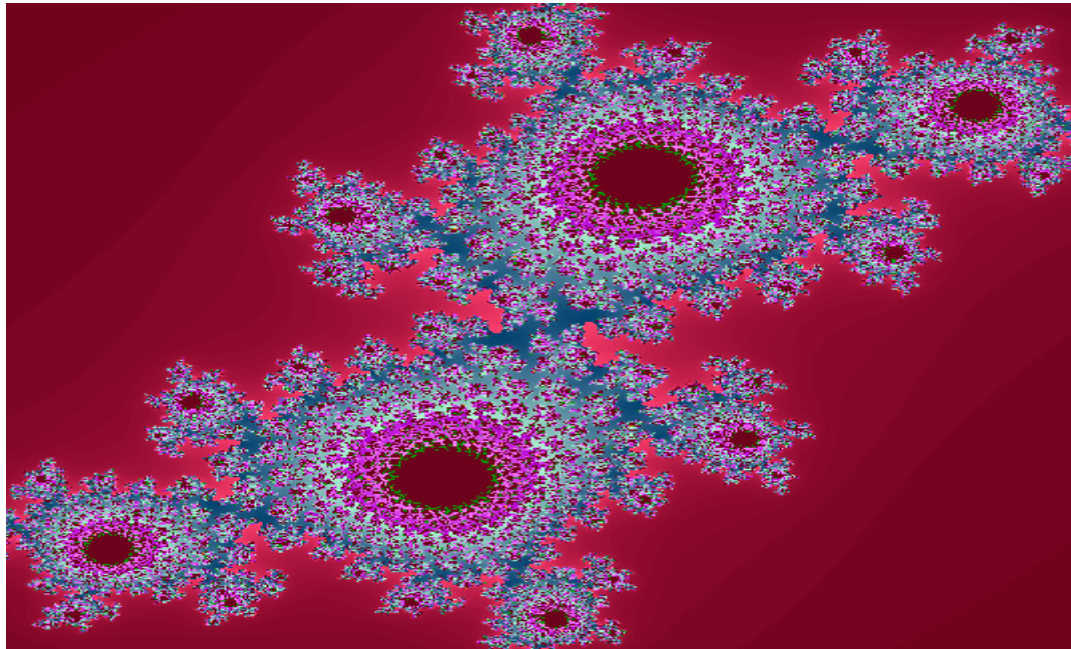


Рис. 17 – Форма множества Жюлиа, полученная с помощью пакета MathCad

Взяв C за пределами кардиоиды, мы не обязательно получим расходящуюся последовательность. Как и в случае преобразова-

ния Ферхюльста, потеря устойчивости неподвижной точкой может сопровождаться рождением устойчивого цикла. Поэтому и при комплексном параметре C , не принадлежащем области кардиоиды, бассейн бесконечно удаленной точки не обязательно займет всю плоскость z . Могут существовать области притяжения точек, составляющих цикл, которые в этом случае образуют сложную структуру. Более точно зависимость формы множества Жюлиа от значения параметра C определяется с помощью множества Мандельброта.

Е. Множество Мандельброта и его компьютерное построение

В отличие от множеств Жюлиа, множество Мандельброта состоит из точек комплексной плоскости параметра C .

Множество Мандельброта можно определить как множество таких значений параметра C , для которых последовательность $z_{n+1} = z_n^2 + C$, стартующая с точки $z = 0$, не уходит на бесконечность.

Из этого определения вытекает очевидный алгоритм построения множества Мандельброта с помощью компьютера.

Рассмотрим область комплексной плоскости C , ограниченную неравенствами

$$\begin{cases} -2.0 \leq \operatorname{Re} C = C' \leq 0.5 \\ -1.5 \leq \operatorname{Im} C = C'' \leq 1.5 \end{cases} \quad (5.8)$$

Как и при исследовании множества Жюлиа, строим дискретную решетку точек области (5.8), задаем радиус убегания R , и для каждой из точек решетки выполняем большое число N итераций последовательности (5.2), стартуя с $z = 0$. Если при этом значении C последовательность z_n не вышла за пределы радиуса убегания, то данное значение C считаем принадлежащим к множеству Мандельброта и окрашиваем его в черный цвет. После исследования таким образом всех точек решетки в области (5.8), окрашенные черным точки дадут графическое изображение множества Мандельброта (рис. 18 и 19).

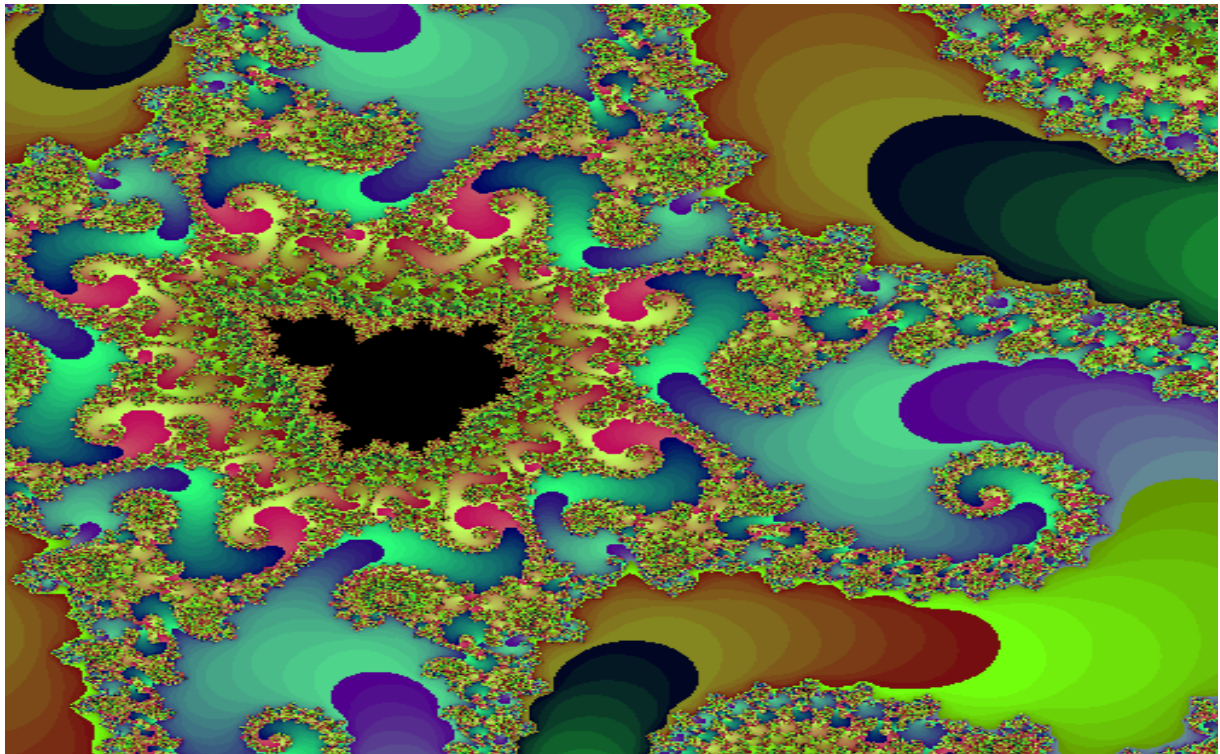


Рис. 18 – Форма множества Мандельброта, полученная с помощью пакета MathCad

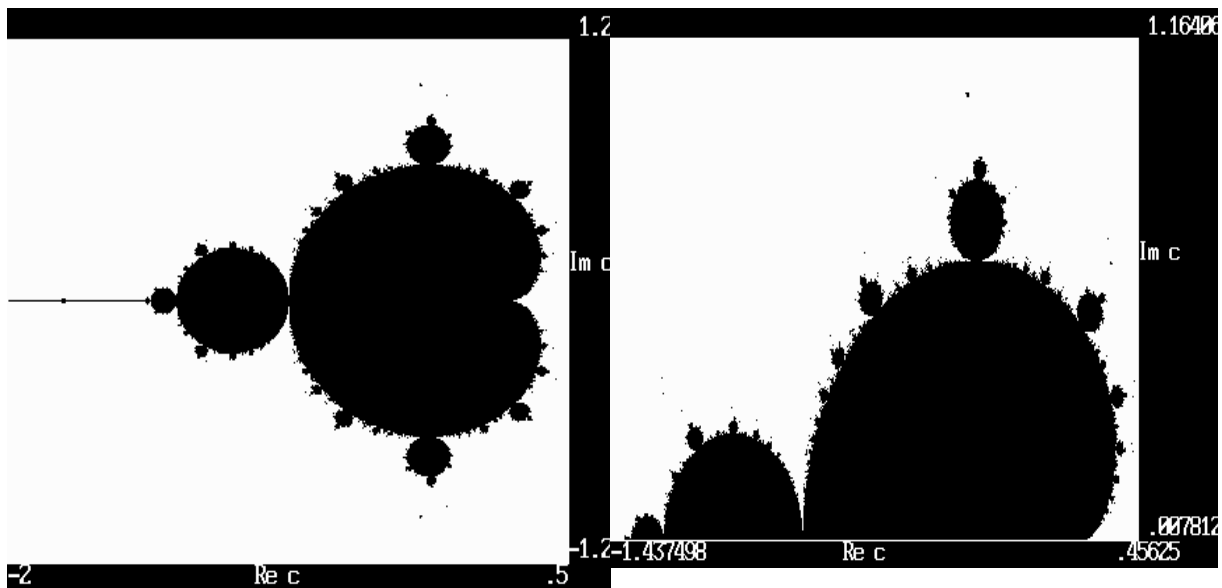


Рис. 19 – Форма множества Мандельброта, полученная с помощью пакета QuickBasic

Основная часть множества Мандельброта – это кардиоиды, внутри которой отображение $z_{n+1} = z_n^2 + C$ имеет устойчивую неподвижную точку. К этой основной кардиоиде присоединяются «почки». Значения C , лежащие внутри «почек», соответствуют устойчивым циклам отображения (5. 1). На каждой почке есть

почки меньшего размера, на них – еще меньше, и так до бесконечности.

Теперь можно уточнить характер зависимости формы множеств Жюлиа J_R от значения комплексного параметра C .

1. Если C лежит внутри главной кардиоиды множества Мандельброта, то J_R – более или менее сильно деформированная окружность.

2. Если C лежит внутри одной из «почек» кардиоиды, то J_R состоит из бесконечного множества слепленных друг с другом деформированных окружностей, каждая из которых окружает точку, принадлежащую циклу.

3. Если C – точка прорастания «почки», то множество Жюлиа имеет «усики», сходящиеся в неподвижной точке.

4. Если C не принадлежит ни основной кардиоиде множества Мандельброта, ни какой-то из почек, то множество Жюлиа «взрывается», рассыпаясь на бесчисленное множество «пылинок» – неустойчивых неподвижных точек и неустойчивых циклов.

Отсюда вытекает другое, более общее, чем приведенное выше определение множества Мандельброта:

Множество Мандельброта – это множество таких значений параметра C , при котором соответствующее множество Жюлиа связно (не распадается на отдельные кусочки).

Г. Фрактальная природа множеств Мандельброта и Жюлиа

Множества Жюлиа принадлежат к числу наиболее прекрасных **фракталов**. Большинство из них **самоподобно**. Взглянув на границу какого-либо множества Жюлиа в микроскоп, мы увидим картину, которая, во-первых, мало зависит от того, в каком месте мы смотрим, а, во-вторых, ничем существенно не отличается от той, которую мы видели и без микроскопа. *В то же время множество Мандельброта не обладает таким свойством самоподобия*: да, множество Мандельброта действительно содержит бесконечное число малых копий самого себя, и, следовательно, в каком бы месте мы ни взглянули на границу множества Мандельброта в микроскоп, мы увидим некоторые из малых копий множества Мандельброта. Но эти копии вплетены в сеть нитей, вид которой очень сильно зависит от того, в какой точке смотр-

реть. Более того, если рассматривать две копии сравнимого размера, то отношение расстояния между ними к их размеру будет сильно зависеть не только от точки, в которой мы наблюдаем, но и от увеличения микроскопа.

5. 2. Порядок выполнения работы

В приложении приведены листинги программы *JULIA-graph* построения множеств Жюлиа для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ и программы *MANDELBROT-graph* построения множества Мандельброта для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ с применением программирования в системе MathCad.

1. Получите изображение множества Жюлиа для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$, соответствующего следующим значениям комплексного параметра C : а) $C' = 0, C'' = 0$; б) $C' = 0.1, C'' = 0$; в) $C' = -0.75, C'' = 0$; г) $C' = -0.1257156, C'' = 0.6491704$.
2. Получите изображение множества Мандельброта для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ в области (5. 8) комплексной плоскости C .
3. Получите изображение множества Жюлиа для отображения Энона

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (5. 9)$$

4. Получите изображение множества Жюлиа для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + \lambda z_n$, $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

5. 3. Контрольные вопросы

1. Квадратичное отображение комплексной плоскости.
2. Динамика отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ при $C = 0$.
3. Неподвижная точка отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$. Критерий устойчивости неподвижной точки.
4. Множество Жюлиа. Зависимость его формы от параметра C .
5. Множество Мандельброта. Определение, построение, форма.

5. 4. Список литературы

1. Пайтген, Х. О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем [Текст] / Х. О. Пайтген, П. Х. Рихтер. – М. : Мир, 1993. – 173 с.

2. Поршнеv, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD [Текст] / С. В. Поршнеv. – М. : Горячая линия–Телеком, 2002. – 252 с.
3. Зельднер, Г. Програмируем на языке Quick BASIC 4. 5 [Текст] / Г. Зельднер. – М. : АВF , 1997. – 432 с.
4. Берже, И. Порядок в хаосе [Текст] / И. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М. : Мир, 1991. – 368 с.
5. Дмитриев, А. С. Генерация хаоса [Текст] / А. С. Дмитриев, Е. В. Ефремова, А. И. Панас, Н. А. Максимов. – М. : Техносфера, 2012. – 424 с.
6. Томпсон, Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике [Текст] / Дж. М. Т. Томпсон. – М. : Мир, 1985. – 254 с.
7. Гулд, Х. Компьютерное моделирование в физике. Ч. 2 [Текст] / Х. Гулд, Я. Тобочник. – М. : Мир, 1990. – 400 с.

ТЕМА №6. Исследование странного аттрактора Лоренца

Цель работы: исследование модели ламинарного и турбулентного течения жидкости в системе нелинейных дифференциальных уравнений Лоренца.

6. 1. Теоретическое введение

Система Лоренца представляет собой тривиальную систему нелинейной динамики, которая обладает *странным аттрактором*.

*В физике **странным аттрактором** называют притягивающие предельные множества, которые содержат одновременно устойчивые и неустойчивые периодические траектории с очень небольшими областями притяжения.*

При помощи флуктуаций фазовая траектория системы переходит с одной устойчивой траектории на другую. Именно по этому движение становится хаотическим в численных расчетах и в экспериментах.

Первая из динамических систем со странным аттрактором была предложена в качестве модели турбулентности в 1963 году американским метеорологом Э. Лоренцем. Она представляет собой систему дифференциальных уравнений, которая получается из уравнений гидродинамики при решении задачи о термоконвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma y - \sigma x \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned} \right\} \quad (6. 1)$$

В модели Лоренца присутствуют три неизвестных функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, которые являются гидродинамическими параметрами, характеризующими движение жидкости. Физический смысл этих переменных можно проинтерпретировать следующим образом:

1) величина x характеризует скорость вращения конвекционных валов;

2) величины y и z отвечают за распределение температуры, соответственно, по горизонтали и по вертикали;

3) параметр b определяется геометрией конвекционной ячейки, а именно, отношением ее вертикального и горизонтального размеров;

4) параметр σ есть отношение коэффициента кинематической вязкости и коэффициента температуропроводности, его называют числом Прандтля; 5) параметр r – приведенное число Рэлея. В свое время Рэлей показал, что условию возникновения конвекционного течения в виде валов отвечает определенное критическое значение этого числа.

Главным в системе Лоренца является параметр r . При плавном изменении этого параметра динамическая система будет менять тип своего аттрактора. При одних значениях r система будет иметь устойчивую предельную точку, а при значениях r , больших некоторого бифуркационного значения r^* , система приобретает совершенно невероятное решение.

Изначально, Лоренц вывел свои уравнения для моделирования движения жидкости в запаянной кольцевой трубке. Если трубка подогревается снизу, то температура жидкости будет увеличиваться, что отвечает увеличению параметра r . При некотором градиенте температур в трубке установится конвективное движение жидкости. Жидкость начнет двигаться в какую-либо сторону по трубке. Теплая жидкость будет всплывать, а холодная – спускаться вниз. При небольшом градиенте температур эта конвекция будет ламинарной, т. е. протекать с постоянной скоростью. Как несложно догадаться, такому ламинарному режиму конвекции соответствует устойчивый узел решения системы Лоренца (рис. 20 и рис. 21).

Вне зависимости от начальных условий, после короткого периода релаксации система переходит в стационарное состояние, описывающее ламинарный режим конвекции, т. е. постоянную скорость циркуляции жидкости по трубке. Система Лоренца замечательна тем, что предлагает модель ламинарно-турбулентного перехода при конвективных движениях жидкости. Если градиент температуры превышает некоторый порог, т. е. r увеличивается до сверхбифуркационного значения, то происходит переход от *ламинарного движения* жидкости к *турбулентному*. С точки зрения нелинейной динамики это означает переход от особой точки типа узла, к другому, совершенно необычному режиму, ко-

торый называется странным аттрактором или аттрактором Лоренца. Решение системы уравнений Лоренца (6. 1) при значении параметра r , превышающем бифуркационное, выглядит почти идентично классическому случайному процессу (рис. 22 и рис. 23).

В определенном смысле, *аттрактор Лоренца является стохастическими автоколебаниями, поддерживаемыми в динамической системе за счет внешнего источника*. В фазовом пространстве странный аттрактор имеет топологию некоторого клубка траекторий, в пределах которого можно выделить две области. В каждый момент времени решение находится в одной из этих областей, причем смена состояний системы в одну или другую область является совершенно непредсказуемой (при всех значениях времени t).

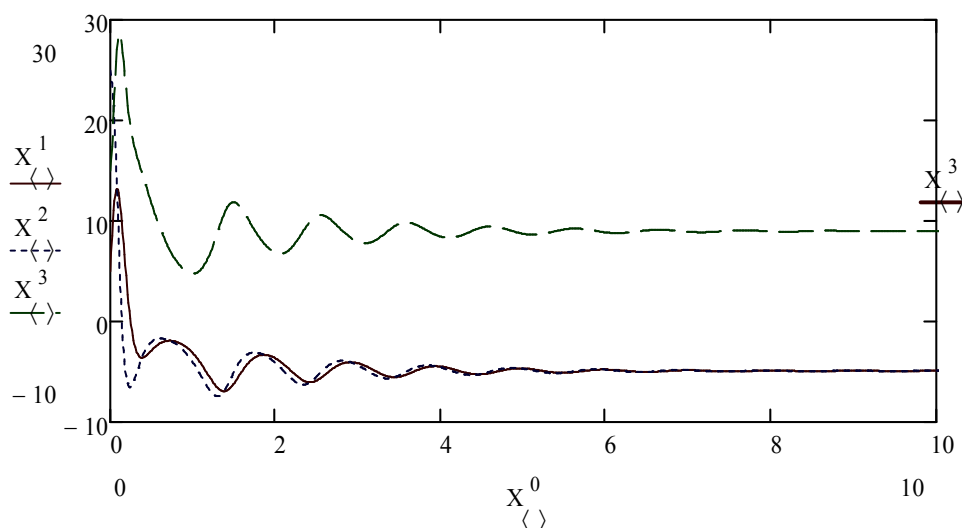


Рис. 20 – Зависимости динамических переменных x , y , z от времени, полученные численным интегрированием уравнений Лоренца при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 10$

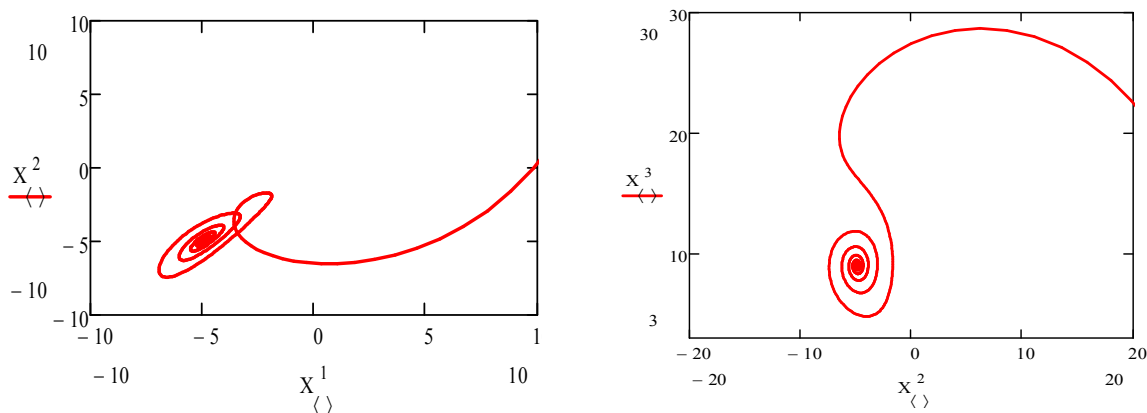


Рис. 21 – Фазовый портрет системы Лоренца для набора параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 10$: а) зависимость динамической переменной y от переменной x ; б) зависимость динамической переменной z от переменной y

Асимптотического поведения системы Лоренца при $t \rightarrow \infty$ нет. Независимо от выбора начальных условий, уравнения Лоренца имеют решение, топология которого показана на рис. 22–23. Такое решение является замечательной моделью турбулентной конвекции. Скорость течения жидкости в трубке с большим градиентом температуры хаотически осциллирует от одного момента времени к другому. Таким образом, модель Лоренца хорошо описывает, как турбулентное движение при конвективном движении жидкости в трубке, так и сам ламинарно-турбулентный переход, происходящий при некотором критическом градиенте температур.

Еще одно замечательное свойство странных аттракторов, в частности аттрактора Лоренца, – это чувствительность к начальным условиям. Аттракторы в виде неподвижных точек и предельных циклов, характеризуются тем, что для различных начальных условий семейства решений сходятся к одному асимптотическому решению.

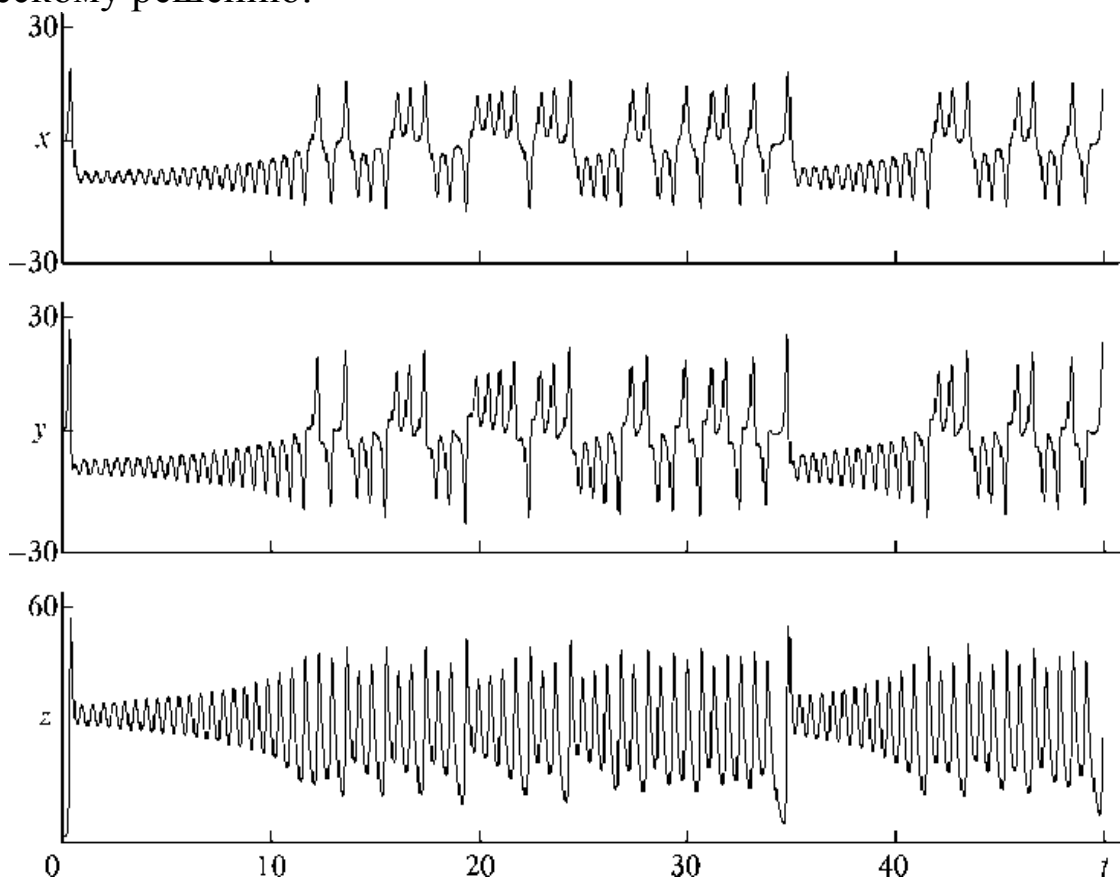


Рис. 22 – Зависимости динамических переменных x , y , z от времени, полученные численным интегрированием уравнений Лоренца при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

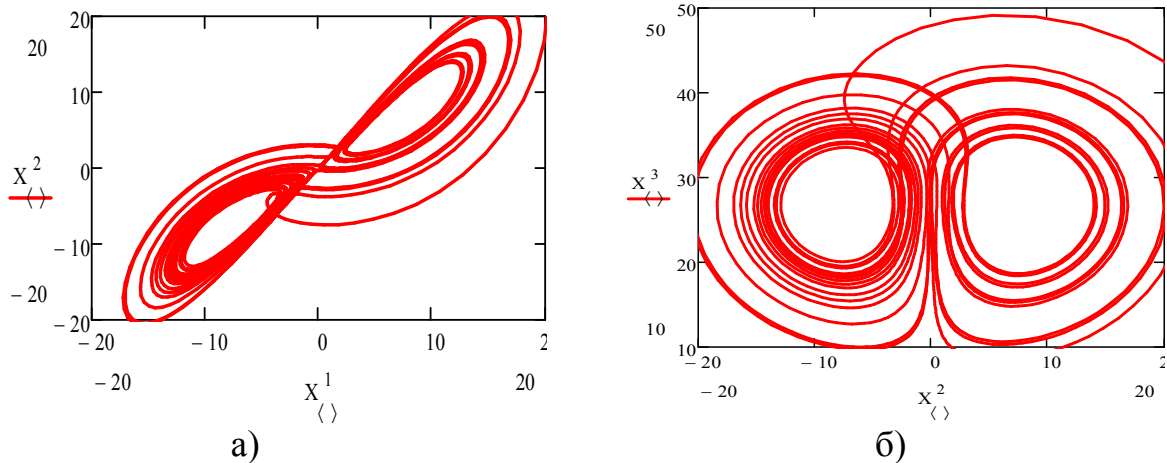


Рис. 23. Фазовый портрет аттрактора Лоренца для «классического» набора параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$:
 а) зависимость динамической переменной y от переменной x ;
 б) зависимость динамической переменной z от переменной y

Иначе говоря, различные траектории, вышедшие из различных точек, соответствующих различным начальным условиям, сходились при $t \rightarrow \infty$ в одну точку или близкие кривые. Поэтому поведение обычных систем, имеющих аттракторы вблизи неподвижных точек и предельных циклов, на больших временах хорошо предсказуемо. Со странными аттракторами все совсем не так. Какие бы близкие начальные условия мы ни брали, при $t \rightarrow \infty$ решения будут расходиться, удаляясь друг от друга в фазовом пространстве. Поскольку в реальных задачах начальные условия известны с некоторой погрешностью (или, по крайней мере, считаются на компьютере с некоторой погрешностью округления), совершенно невозможно указать поведение странного аттрактора при достаточно большом времени t , **поэтому поведение систем, описываемых странными аттракторами, совершенно непредсказуемо**. Как отмечал сам Лоренц, именно с таким разбеганием траекторий динамической системы может быть связана принципиальная невозможность прогнозирования погоды на несколько недель вперед.

6. 2. Порядок выполнения работы

Написать программу **Lorenz Attractor** приближенного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений— системы Лоренца, описываемой уравнениями (6. 1) с заданными начальными условиями. Построить графики функций $x(t), y(t), z(t)$, $y=y(x), z=z(y)$.

Указание

Ниже представлен алгоритм программы построения графиков функций $x(t), y(t), z(t)$, $y=y(x)$, $z=z(y)$ с применением пакета MathCad.

1. Создание правой части системы нелинейных дифференциальных уравнений Лоренца в виде её символьной записи в вектор F.
2. Создать вектор начальных значений искомых функций.
3. Записать начальное и конечное значение независимой переменной-длительность переменной время– $t1$ и $t2$.
4. Представить результаты решения системы нелинейных дифференциальных уравнений Лоренца в графическом и табличном виде, используя функцию **rkfixed**
5. Построение графиков зависимостей $x(t), y(t), z(t)$.
6. Построение графика фазовой траектории $y=y(x)$.
7. Построение графика фазовой траектории $z=z(y)$.

В приложении приведен листинг программы **Lorenz Attractor** решения системы нелинейных дифференциальных уравнений Лоренца в пакете MathCad.

6. 3. Контрольные вопросы

1. Вид системы нелинейных дифференциальных уравнений системы Лоренца.
2. Физический смысл переменных и параметров системы Лоренца.
3. Вид зависимости динамических переменных x, y, z от времени, которая получена численным интегрированием уравнений Лоренца при значениях параметров модели $\sigma = 10, b = 8/3, r = 10$.
4. Фазовый портрет системы Лоренца для набора параметров модели $\sigma = 10, b = 8/3, r = 10$.
5. Вид зависимости динамических переменных x, y, z от времени, которая получена численным интегрированием уравнений Лоренца при значениях параметров модели $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$.
6. Фазовый портрет аттрактора Лоренца для «классического» набора параметров модели $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$.
7. Дайте определение *странного* аттрактора.

6. 4. Список литературы

1. Лоскутов, А. Ю. Введение в синергетику [Текст] / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. – М. : Наука, 1990. – 272 с.

2. Кузнецов, С. П. Динамический хаос [Текст] / С. П. Кузнецов. – М. : Физматлит, 2001. – 296 с.
3. Поршнеv, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD [Текст] / С. В. Поршнеv. – М. : Горячая линия–Телеком, 2002. – 252 с.

ТЕМА №7. Исследование модели брюсселятора

Цель работы: исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в модели брюсселятора, построение фазовой траектории движения модели при разных значениях исходной концентрации катализатора.

7. 1. Теоретическое введение

А. Реакция Белоусова-Жаботинского

В 1950 г. советский химик Белоусов изучал окисление лимонной кислоты броматом калия. В качестве катализатора реакции и одновременно индикатора использовались соединения церия, диссоциация которых в водном растворе приводила к появлению свободных ионов Ce . Известно, что ионы Ce^{4+} практически не окрашивают раствор, в то время как Ce^{3+} даёт интенсивную желтую окраску. Ожидалось, что через некоторое время после начала реакции установится некоторое стабильное отношение концентраций $[Ce^{4+}]/[Ce^{3+}]$, которое зависит от скорости реакции, и о величине которого можно судить по окраске раствора. Каково же было удивление химика, когда вместо этого раствор начал изменять окраску с жёлтой на бесцветную и обратно с точно выдерживаемым периодом! Белоусов наблюдал десятки периодов.

Статью с описанием результатов эксперимента ни в одном химическом журнале не приняли, потому что «этого не может быть». Только в 1959 г. удалось пристроить краткую записку в сборник рефератов по медицине. Там на неё, спустя ещё пять лет, наткнулся молодой биохимик Жаботинский, который исследовал реакцию теоретически и экспериментально и подтвердил результаты Белоусова. На этот раз новость об удивительной реакции облетела весь мир, вызвав огромный поток исследований. В последние годы открыто много новых «химических часов», и число их продолжает постоянно расти.

Жаботинский усовершенствовал постановку эксперимента, используя в качестве окислителя бромат натрия $NaBrO_3$, а восстановителя – малоновую кислоту $CH_2(COOH)_2$. Катализатором по-прежнему служили ионы церия. Эти опыты очень эффектны – окраска раствора периодически переходит из голубой в розовую и обратно.

Колебания окраски, определяемые изменениями концентрации $[Ce^{4+}]$, являются релаксационными (рис. 24). Их период делится на две фазы: τ_1 – падения $[Ce^{4+}]$ (восстановления) и τ_2 – нарастание $[Ce^{4+}]$ (окисление):

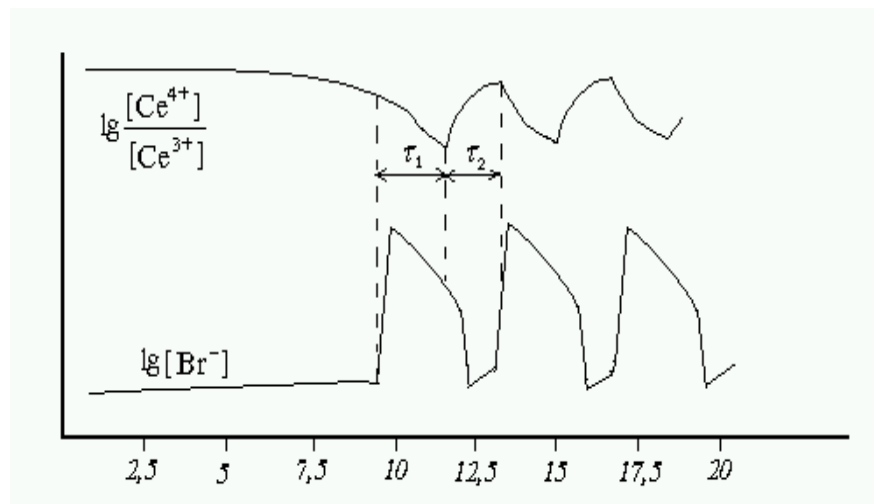


Рис. 24 – Релаксационные колебания окраски раствора, определяемые изменениями концентрации $[Ce^{4+}]$

Реакция **БЖ** (как принято ее называть в специальной литературе), несмотря на простоту реактивов, оказалась очень сложной, включающей не менее двух десятков промежуточных стадий. Поэтому начались поиски химической системы, которая также давала бы периодическое поведение, но при существенно более простой кинетике. В 1968 г. модель такой системы предложил выдающийся бельгийский физико-химик, нобелевский лауреат И. Р. Пригожин. Модель получила название «брюсселятор» – по имени города, в котором Илья Романович жил и работал (Брюссель).

В1. Описание модели брюсселятора

В реактор непрерывно подаются вещества А и В, из которых непрерывно образуются продукты D и E, также непрерывно удаляемые из реактора. Таким образом, уравнение итоговой реакции:



Однако реакция (7. 1) идет через промежуточные стадии с участием веществ X и Y, по схеме:



где k_i – константы скорости соответствующих реакций. Стадия (III) является автокаталитической: чем больше вещества X , тем быстрее она идет, и тем больше этого вещества появляется. А. М. Жаботинский показал, что наличие как минимум одной автокаталитической стадии является необходимым условием возможности колебательного режима у реакции. Чтобы выяснить каковы достаточные условия, требуется более глубокий анализ.

Запишем уравнения химической кинетики для брюсселятора. Будем считать, что исходные реагенты подаются, а продукты реакции отводятся из реактора с такими скоростями, что концентрации A , B , D и E с течением времени не изменяются. Тогда кинетика системы определяется изменением концентраций промежуточных веществ X и Y :

$$\frac{dX}{dt} = k_1 A - k_2 BX + k_3 X^2 Y - k_4 X; \quad (7. 2a)$$

$$\frac{dY}{dt} = k_2 BX - k_3 X^2 Y. \quad (7. 2b)$$

Смысл уравнений (7. 2) заключается в том, что вещество X образуется на стадии I со скоростью $k_1 A$, расходуется на стадии II со скоростью $k_2 BX$, нарабатывается на стадии III со скоростью $k_3 X^2 Y$ и исчезает на стадии IV со скоростью $k_4 X$. Для вещества Y соображения аналогичны.

Для уменьшения числа параметров в кинетических уравнениях (7. 2), перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = k_4 t, \quad x = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} X, \quad y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} Y. \quad (7. 3)$$

В новых переменных уравнения (7. 2) приобретают вид дифференциальных уравнений с двумя параметрами a и b :

$$\frac{dx}{d\tau} = a + x^2 y - (b+1)x, \quad (7.4a)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = bx - x^2 y, \quad (7.4б)$$

где $a = \frac{k_1}{k_4} \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} A$, $b = \frac{k_2}{k_4} B$.

Аналитически дифференциальные уравнения (7.4) не решаются, поскольку содержат нелинейные слагаемые, пропорциональные $x^2 y$. Но для того, чтобы выяснить, возможно ли в данной системе самопроизвольное возбуждение концентрационных колебаний, это и не нужно.

В2. Исследование модели брюсселятора

Заметим, что брюсселятор всегда имеет стационарное состояние, когда концентрации X и Y с течением времени не изменяются: $dX/dt = dY/dt = 0$. В этом состоянии приведенные концентрации x и y имеют такие значения, чтобы правые части уравнений (7.4) обращались в нуль:

$$x_0 = a, \quad y_0 = b/a. \quad (7.5)$$

Если стационарное состояние (7.5) устойчиво, то есть отклонения от этого состояния сами по себе затухают, то концентрации x и y в конце концов придут к значениям (7.5), на чем их изменение закончится. Колебания в брюсселяторе могут появиться лишь если состояние (7.5) неустойчиво, то есть любое отклонение от него будет нарастать – причем не монотонно, а через раскачку колебаний. Последнее возможно лишь в определенной области значений параметров a и b , что мы сейчас и покажем.

Пусть x и y слабо отличаются от стационарных значений (7.5):

$$\begin{aligned} x(\tau) &= a + \xi(\tau), & y(\tau) &= b/a + \eta(\tau), \\ |\xi| &\ll a, & |\eta| &\ll b/a. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Подставляя (7.6) в (7.4) и пренебрегая малыми слагаемыми, содержащими произведения ξ и η , получаем для последних систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= (b-1)\xi + a^2\eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -b\xi - a^2\eta,\end{aligned}\tag{7.7}$$

частные решения которой, как известно, имеют вид

$$\xi, \eta \sim e^{pt}.\tag{7.8}$$

Характеристические показатели p определяются подстановкой проекта решения (7.8) в уравнения (7.7) и приравниванием нулю детерминанта получающейся системы линейных однородных алгебраических уравнений. Поскольку в системе два уравнения, детерминант – квадратичная функция от p , и для характеристического показателя мы получаем квадратное уравнение

$$p^2 + (a^2 - b + 1)p + a^2 = 0,\tag{7.9}$$

дискриминант которого

$$D = (a^2 - b + 1)^2 - 4a^2 = [(a-1)^2 - b] \cdot [(a+1)^2 - b],\tag{7.10}$$

а решения –

$$p_{1,2} = \frac{b - (a^2 + 1) \pm \sqrt{D}}{2}.\tag{7.11}$$

В3. Поведение решений

Из (7.11) следует, что поведение решений (7.8) определяется знаком разности $b - (a^2 + 1)$ и знаком дискриминанта D . В свою очередь, знак D – это знак произведения $b - (a + 1)^2$ и $b - (a - 1)^2$.

Кривые $b = (a + 1)^2$, $b = (a^2 + 1)$ и $b = (a - 1)^2$ делят всю область значений параметров a и b на четыре домена (см. рис. 25) Характер поведения брюсселятора зависит от того, в какой домен попадают присущие ему значения a и b (которые, напомним, в свою очередь определяются поддерживаемыми концентрациями исходных реагентов и константами скоростей промежуточных стадий реакции).

В домене I дискриминант D положителен, оба характеристических показателя p вещественны и отрицательны. Соответствен-

но, решение (7. 8) описывает быстрое монотонное приближение системы к стационарному состоянию (7. 5) – аттрактору типа устойчивый узел. Концентрационные колебания в этом домене значений параметров невозможны в принципе.

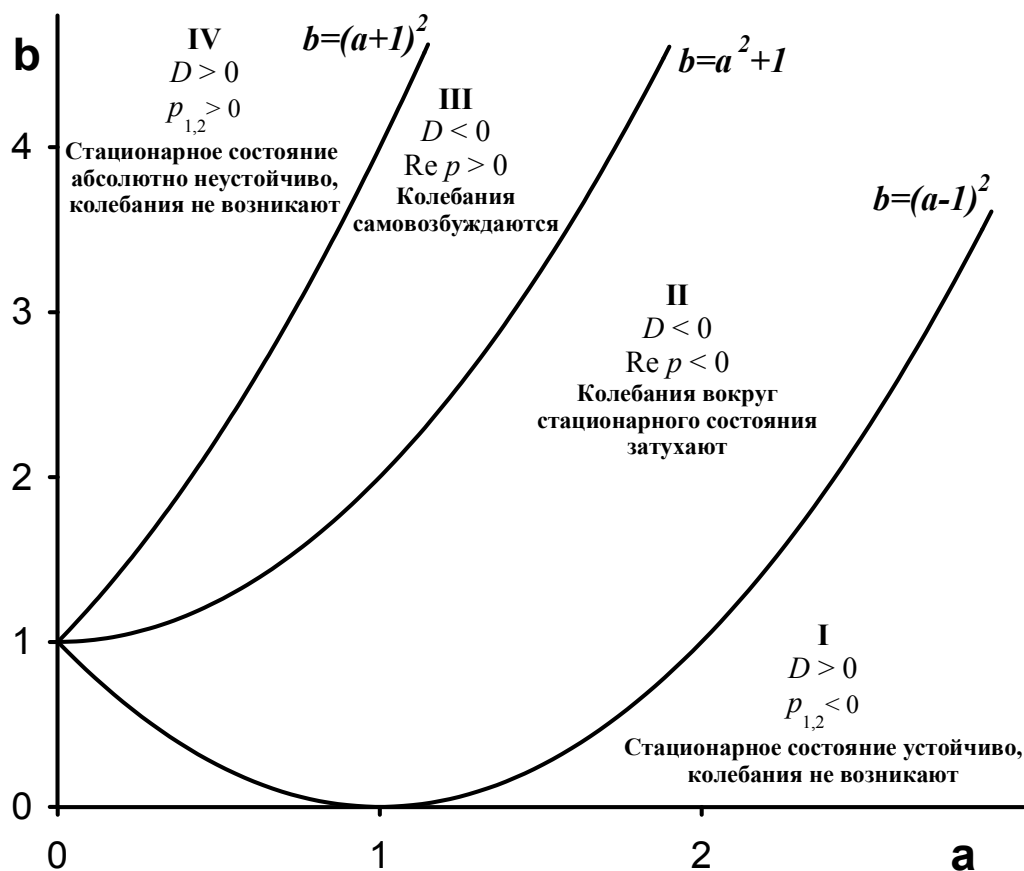


Рис. 25 – Диаграмма состояния брусселлятора

В домене II дискриминант D отрицателен, то есть характеристические показатели имеют мнимую часть, описывающую колебания с соответствующей частотой. Однако вещественная часть характеристических показателей в этом домене по-прежнему отрицательна, то есть колебания с течением времени быстро затухают. Стационарное состояние по-прежнему устойчиво (является аттрактором типа устойчивый фокус).

В домене III дискриминант D отрицателен, что придает характеристическим показателям мнимую часть, описывающую колебания концентраций X и Y . В отличие от домена II, вещественная часть p здесь положительна, то есть амплитуда колебаний с течением времени нарастает – концентрационные колебания самопроизвольно раскачиваются. Численный расчет модели (7. 4) показывает, что в этом случае система имеет аттрактор типа устой-

чивый предельный цикл, которого достигает, когда амплитуда колебаний станет достаточно велика. Это как раз и соответствует вхождению реакции в колебательный режим.

В домене IV оба характеристических показателя вещественны и положительны, что соответствует сильной неустойчивости стационарного состояния (неустойчивый узел). Численные расчеты свидетельствуют, что в данном случае предельный цикл отсутствует, а систему с течением времени быстро выбрасывает на границу доступного ей фазового пространства.

7. 2. Порядок выполнения работы

Написать программу *Brusselator* приближенного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений модели Брюсселятора, описываемой уравнениями системы (7. 4) с заданными начальными условиями. Построить графики функций $x(t)$, $y(t)$ и фазовую траекторию движения модели $y(x)$.

Указание

Ниже представлен алгоритм программы построения графиков функций $x(t)$, $y(t)$, $y(x)$ с применением программирования в системе MathCad.

1. Создание правой части системы нелинейных дифференциальных уравнений – модели Брюсселятора в виде её символьной записи в вектор D.
2. Создать вектор начальных значений искомых функций.
3. Записать начальное и конечное значение независимой переменной-длительность переменной время – t_1 и t_2 .
4. Представить результаты решения системы нелинейных дифференциальных уравнений модели Брюсселятора, используя функцию **rkfixed** и элементы программирования (Programming) в системе MathCad.
5. Построение графика зависимости $x(t)$.
6. Построение графика зависимости $y(t)$.
7. Построение графика фазовой траектории $y = y(x)$.

В приложении приведен листинг программы *Brusselator* решения системы нелинейных дифференциальных уравнений модели Брюсселятора в пакете MathCad.

7. 3. Контрольные вопросы

1. Реакция Белоусова-Жаботинского.
2. Описание модели брюсселятора.
3. Вид нелинейной системы дифференциальных уравнений модели брюсселятора.
4. Диаграмма состояния брюсселятора. Математическая и физическая характеристика доменов I, II, III и IV диаграммы состояния.
5. Фазовый портрет брюсселятора при разных значениях параметра b , представляющего исходную концентрацию катализатора.

7. 4. Список литературы

1. Максимов, А. И. Введение в нелинейную физическую химию: учебное пособие [Текст] / А. И. Максимов; ГОУВПО Иван. гос. хим. -технол. ун-т. – Иваново, 2010. – 74 с.
2. Братусь, А. С. Динамические системы и модели биологии [Текст] / А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. – М.: Физматлит, 2010. – 400 с.
3. Поршневу, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD [Текст] / С. В. Поршневу . – М. : Горячая линия–Телеком, 2002. – 252 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Листинги программ для работы в пакете *MathCad*

А. Программа Oscillator-1.

Гармонический осциллятор

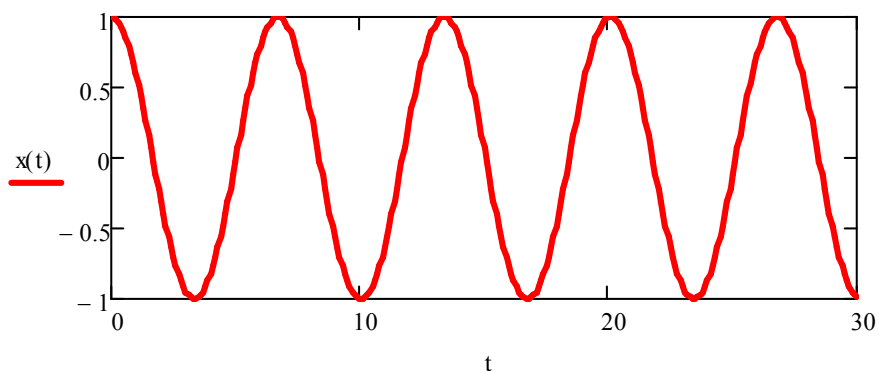
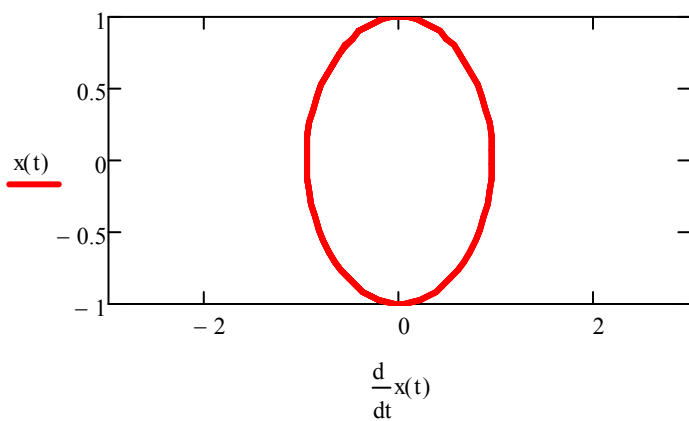
$$\gamma := 0 \quad \omega := 1$$

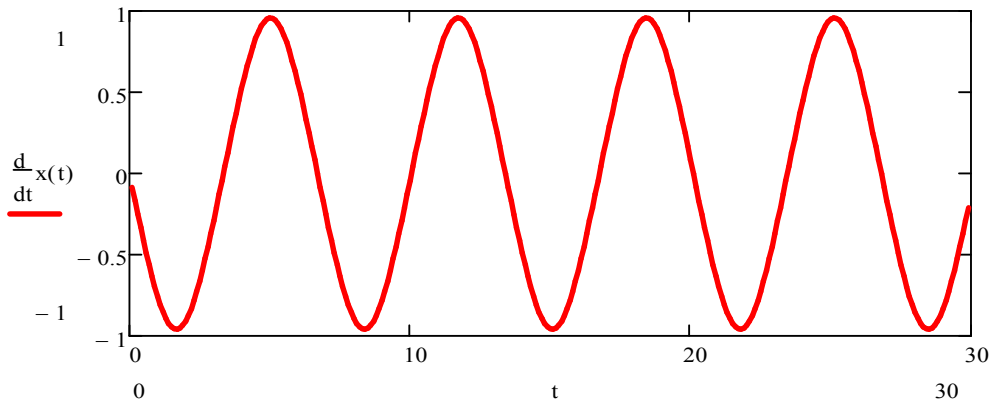
Given

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\gamma \cdot \frac{d^1}{dt^1}x(t) + \omega \cdot \omega \cdot \sin(x(t)) = 0$$

$$x(0) = 1 \quad x'(0) = 0$$

$$x := \text{Odesolve}(t, 30) \quad t := 0, 0.1.. 100$$





В. Программа Oscillator-2.

Гармонический осциллятор в среде с вязким трением

$$\gamma := 0.1$$

$$\omega := 1$$

Given

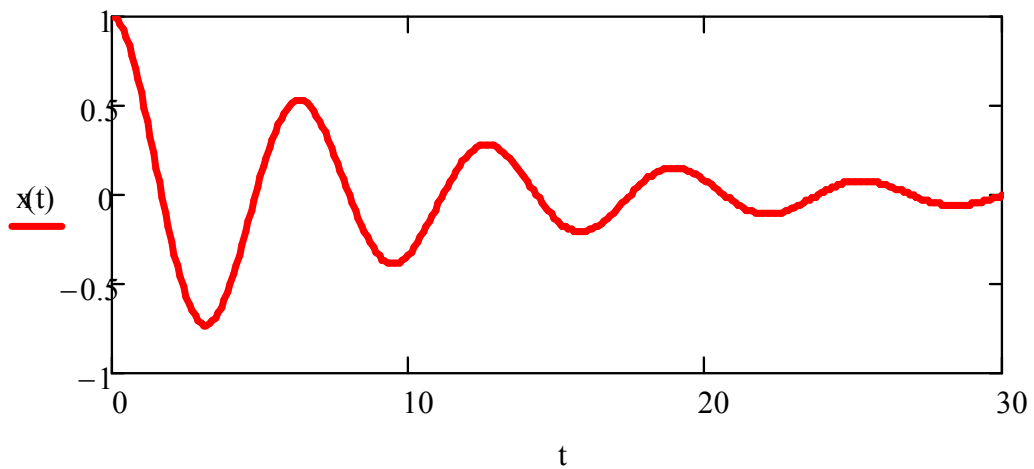
$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\gamma \cdot \frac{d^1}{dt^1}x(t) + \omega \cdot \omega \cdot x(t) = 0$$

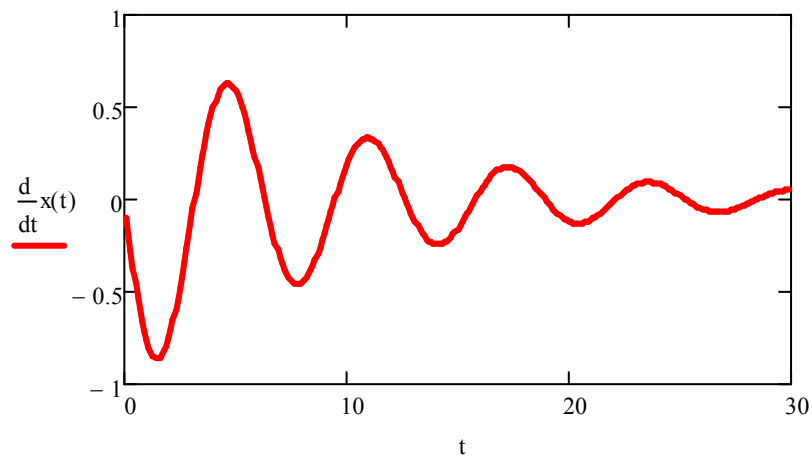
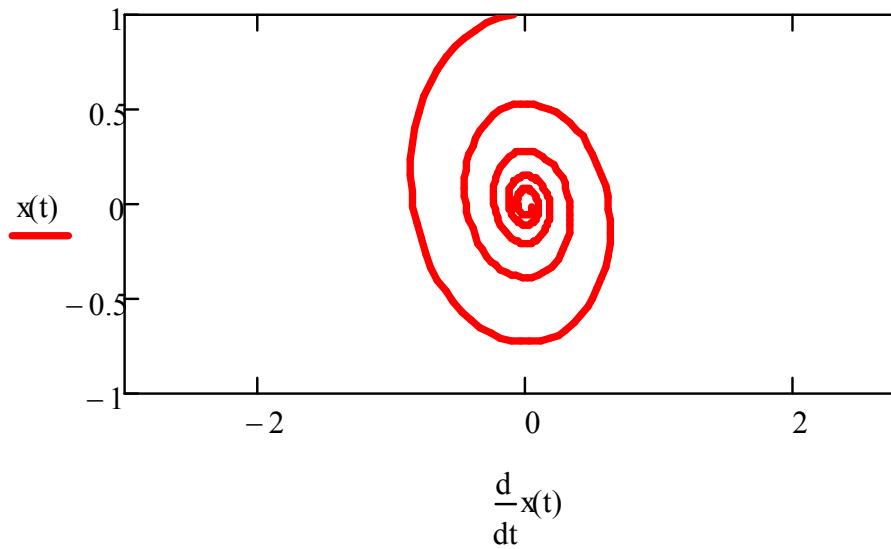
$$x := \text{Odesolve}(t, 30)$$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 0$$

$$t := 0, 0.1.. 100$$





**С. Программа Oscillator-3.
Математический маятник**

$$\gamma := 0 \quad \omega := 1$$

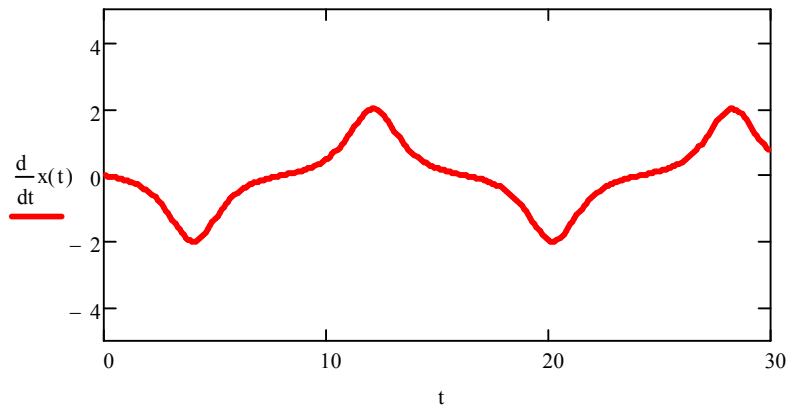
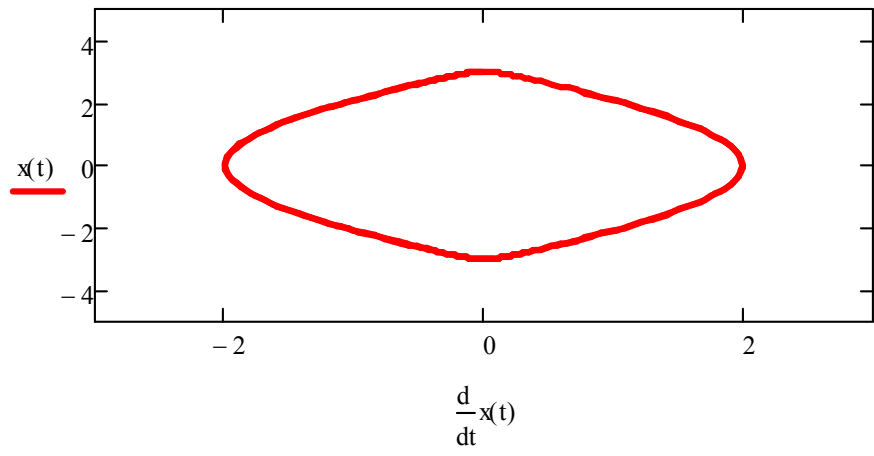
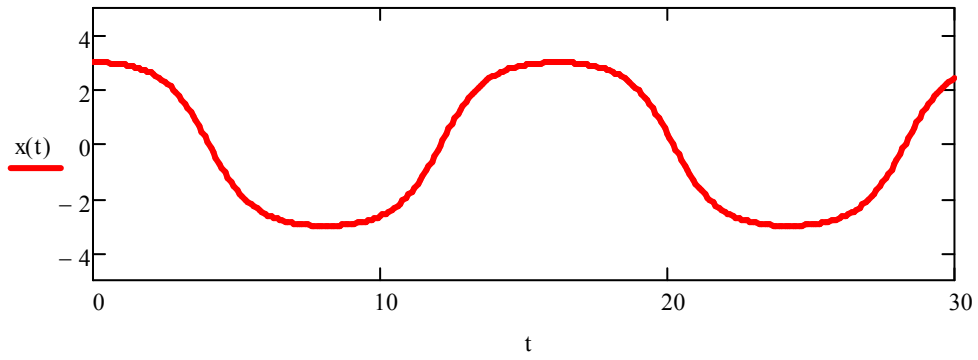
Given

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\gamma \cdot \frac{d^1}{dt^1}x(t) + \omega \cdot \omega \cdot \sin(x(t)) = 0$$

$$x(0) = 3 \quad x'(0) = 0$$

x := Odesolve (t, 30)

t := 0, 0.1 .. 100



D. Программа VDP-generator. Генератор Ван дер Поля

$\mu := 5$

Given

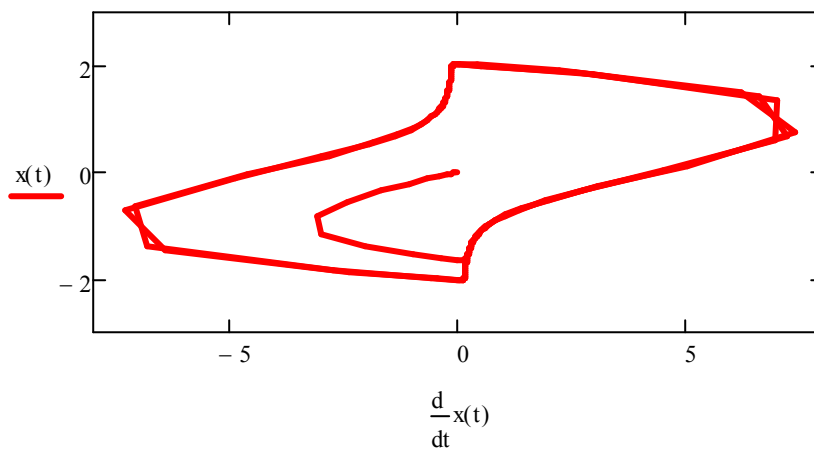
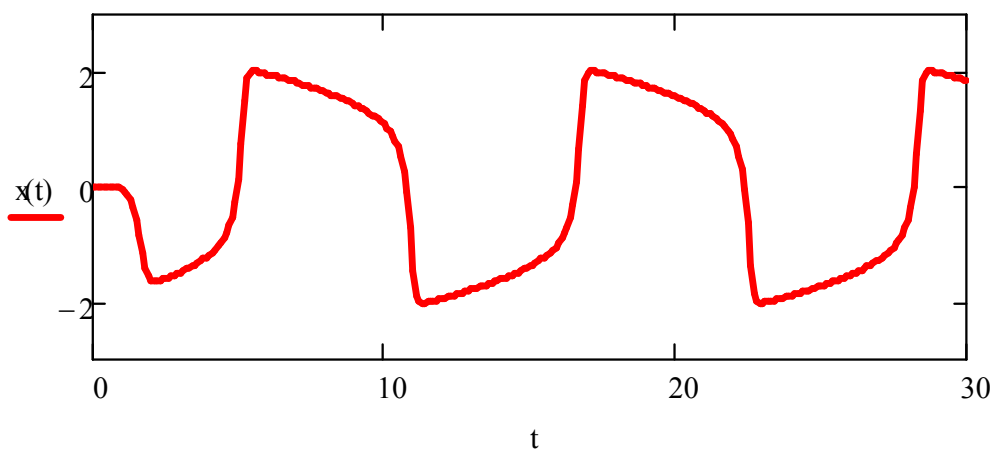
$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) - \mu \cdot (1 - x(t)^2) \cdot \left(\frac{d^1}{dt^1} x(t) \right) + x(t) = 0$$

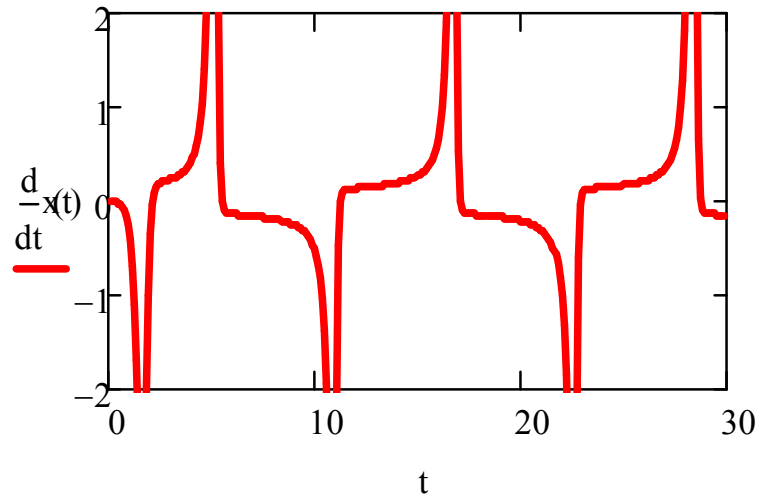
$$x(0) = 0.01$$

$$x'(0) = 0$$

$x := \text{Odesolve}(t, 30)$

$t := 0, 0.1.. 100$





**Е. Программа LV-model.
Модель Лотки-Вольтерры**

$$\underline{C} := 0.1$$

$$D := 1$$

$$r := 0.1$$

$$\underline{F}(t, y) := \begin{pmatrix} C \cdot y_0 - r \cdot y_0 \cdot y_1 \\ -D \cdot y_1 + r \cdot y_0 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

$$P := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 1.5 \end{pmatrix}, t_0, t_1, M, F \right]$$

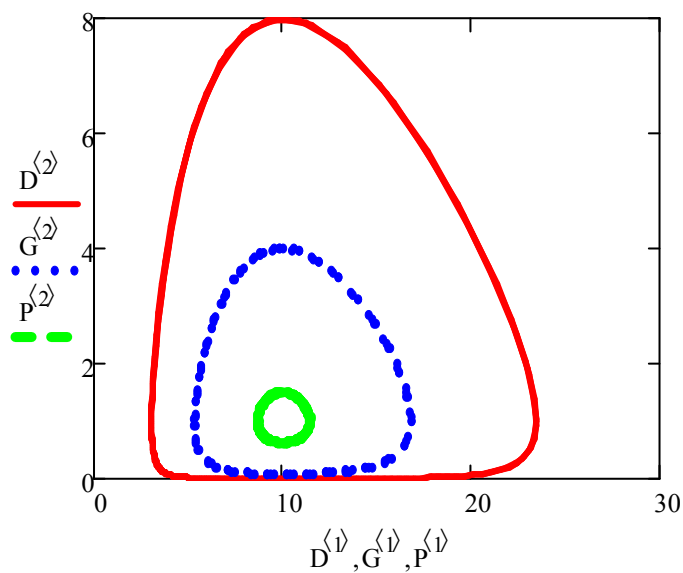
$$M := 400$$

$$t_0 := 0$$

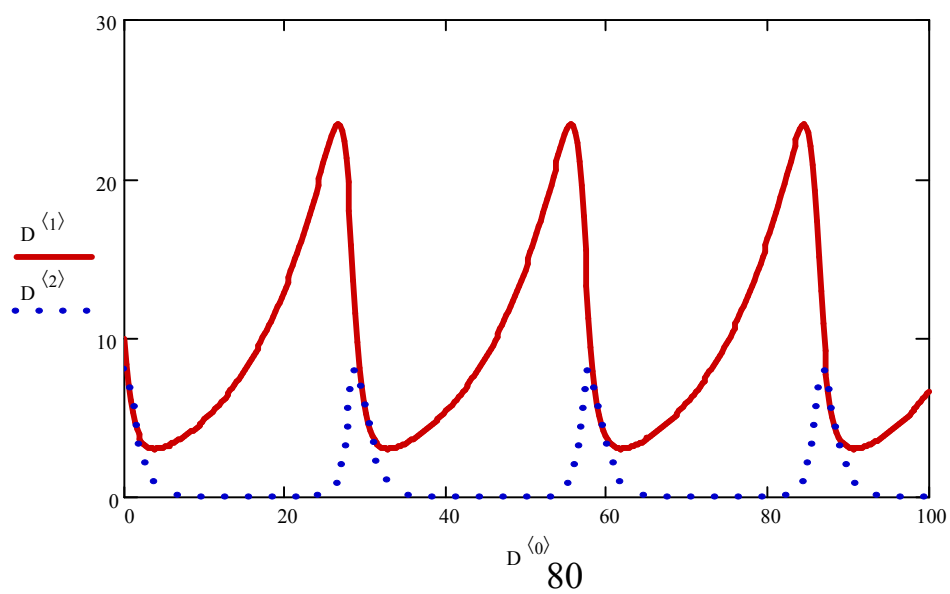
$$\underline{G} := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}, t_0, t_1, M, F \right]$$

$$t_1 := 100$$

$$\underline{D} := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}, t_0, t_1, M, F \right]$$



	0	1	2
0	0	10	8
1	0.25	8.406	7.837
2	0.5	7.12	7.406
3	0.75	6.111	6.802
4	1	5.331	6.109
5	1.25	4.734	5.394
6	1.5	4.279	4.701
7	1.75	3.933	4.056
8	2	3.671	3.473
9	2.25	3.474	2.957
10	2.5	3.327	2.507
11	2.75	3.22	2.119
12	3	3.144	1.787
13	3.25	3.094	1.504
14	3.5	3.065	1.265
15	3.75	3.053	...



Ф. Программа FERHULST-graph

$t := 0..5$

$r := 2$

$$X(t,N) := N_0 \cdot e^{rt} \cdot \frac{1}{\left[1 - N_0 \cdot (1 - e^{rt}) \right]}$$

$$x0 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

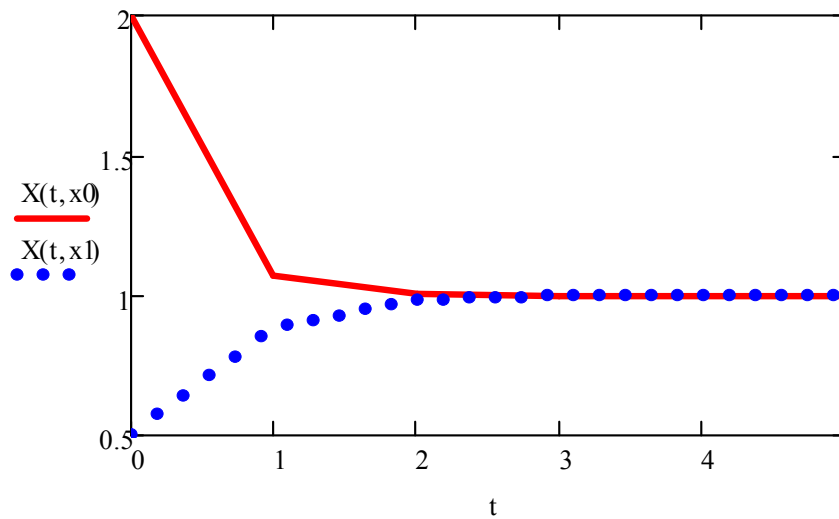
$$x1 := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$X(t, x0) =$

2
1.073
1.009
1.001
1
1

$X(t, x1) =$

0.5
0.881
0.982
0.998
1
1



G. Программа JULIA-graph. Множество Жюлиа

Параметры задачи

$N := 500$

$\text{realLower} := -1$

$\text{realUpper} := 1$

$\text{imagLower} := -1$

$\text{imagUpper} := 1$

$\text{maxIter} := 300$

$\text{bailout} := 2$

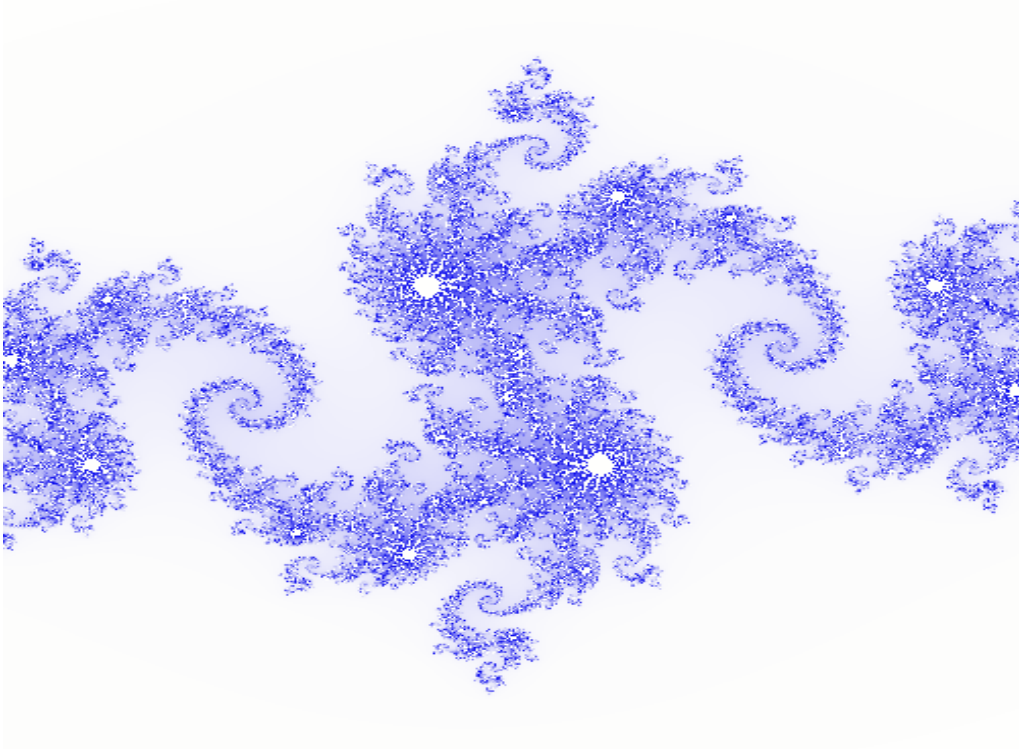
Расчеты

$i := 0..N$ $j := 0..N$

$\text{imag}_{i,j} := \text{realLower} + \frac{(\text{realUpper} - \text{realLower})}{N} \cdot j + \left[\text{imagLower} + \frac{(\text{imagUpper} - \text{imagLower})}{N} \cdot i \right] \cdot i$

```
Z := c ← -0.8 + 0.156i
for i ∈ 0..N
  for j ∈ 0..N
    z ← imagi,j
    for iter ∈ 1..maxIter
      z ← z2 + c
      if |z| > bailout
        iterationsi,j ← iter
        break
    return iterations
```

```
col := Zmax ← max(Z)
for i ∈ 0..N
  for j ∈ 0..N
    Ri,j ← 255 - 255 ⋅  $\left( \frac{Z_{i,j}}{Z_{\max}} \right)$ 
    Gi,j ← 255 - 255 ⋅  $\left( \frac{Z_{i,j}}{Z_{\max}} \right)$ 
    Bi,j ← 255 - 25 ⋅ ln  $\left( 1.1 + \frac{Z_{i,j}}{Z_{\max}} \right)$ 
  return  $\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$ 
```



col

Н. Программа MANDELBROT-graph. Множество Мандельброта

Параметры задачи

$N := 500$

realLower := -0.7454316;

realUpper := -0.7454213;

imagLower := 0.1130038;

imagUpper := 0.1130141;

maxIter := 1000

bailout := 2

Расчеты

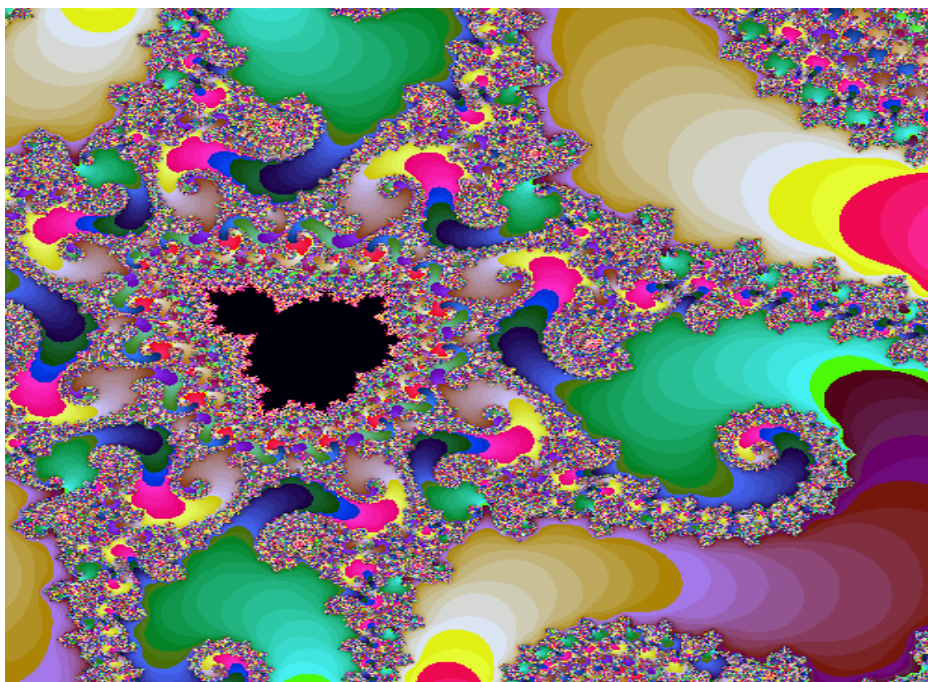
i := 0..N

j := 0..N

$$\text{imag}_{i,j} := \text{realLower} + \frac{(\text{realUpper} - \text{realLower})}{N} \cdot j + \left[\text{imagLower} + \frac{(\text{imagUpper} - \text{imagLower})}{N} \cdot i \right]$$

```
Z :=
  for i ∈ 0..N
    for j ∈ 0..N
      z ← imagi,j
      for iter ∈ 1..maxIter
        z ← z2 + imagi,j
        if |z| > bailout
          iterationsi,j ← iter
          break
      return iterations
```

```
col :=
  for i ∈ 0..N
    for j ∈ 0..N
      Ri,j ← 2 mod (500, Zi,j + 0.1)
      Gi,j ← 2 mod (900, Zi,j + 1)
      Bi,j ← 20 mod (1000, 50 ln(Zi,j + 1.01))
    return (R
           G
           B)
```



col

I. Программа Brusselator. Брюсселятор

$$v := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.5 & 1.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1.5 & 0.1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$B := 0.5$$

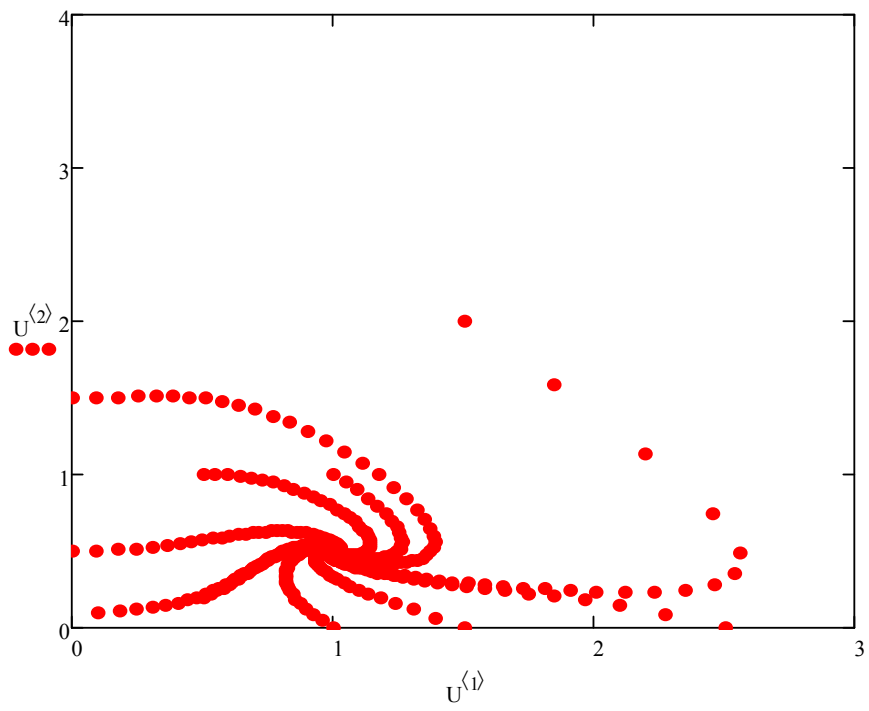
$$t0 := 0 \quad t1 := 20 \quad M := 200$$

$$D(t,y) := \begin{cases} -(B+1) \cdot y_0 + y_0 \cdot y_0 \cdot y_1 + 1 \\ B \cdot y_0 - y_0 \cdot y_0 \cdot y_1 \end{cases}$$

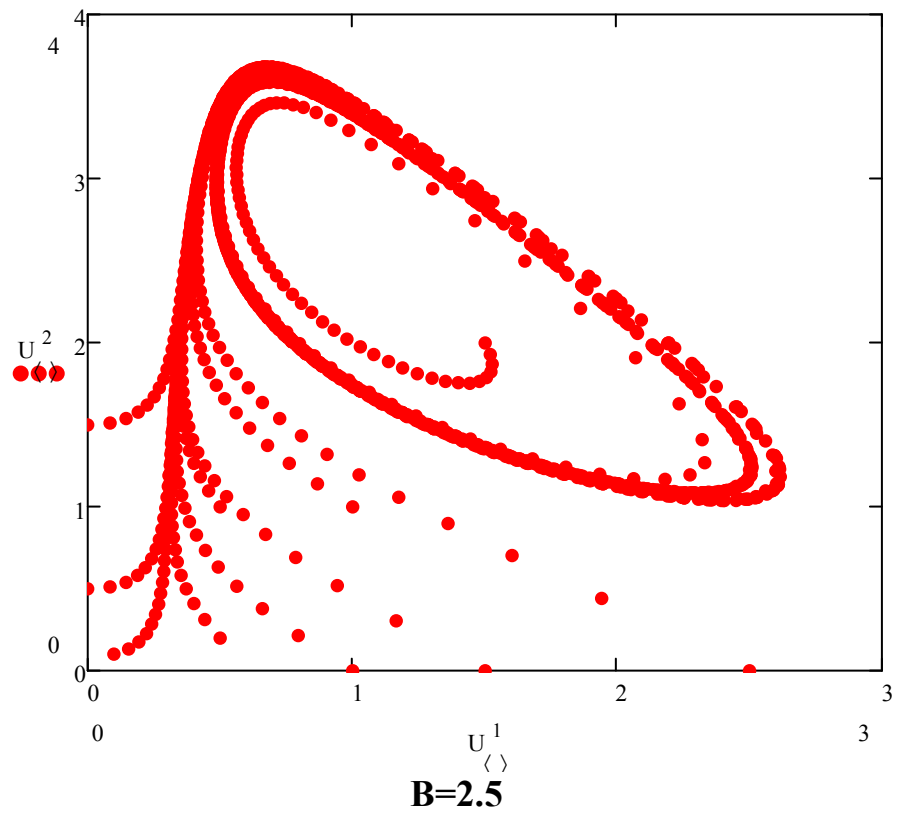
```

U :=
  y ← v<0>
  z ← rkfixed(y, t0, t1, M, D)
  z1<0> ← z<0>
  z1<1> ← z<1>
  z1<2> ← z<2>
  for k ∈ 1..last[(vT)<1>]
    y ← v<k>
    z ← rkfixed(y, t0, t1, M, D)
    z2<0> ← z<0>
    z2<1> ← z<1>
    z2<2> ← z<2>
    z1 ← stack(z1, z2)
  z1

```



B=0.5

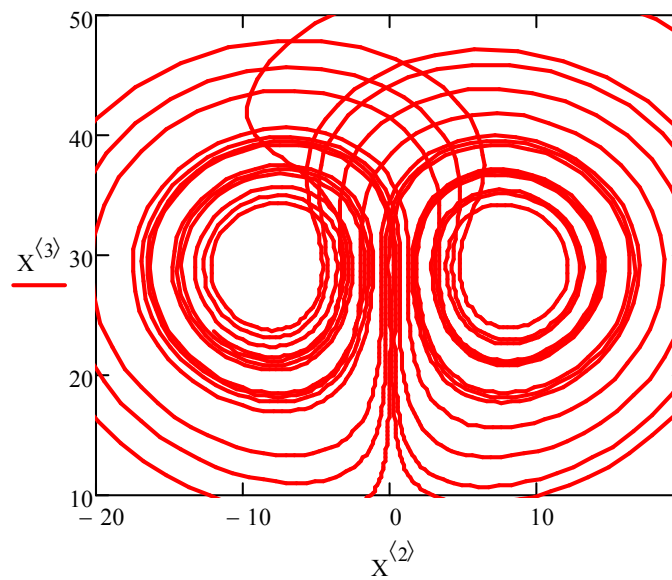
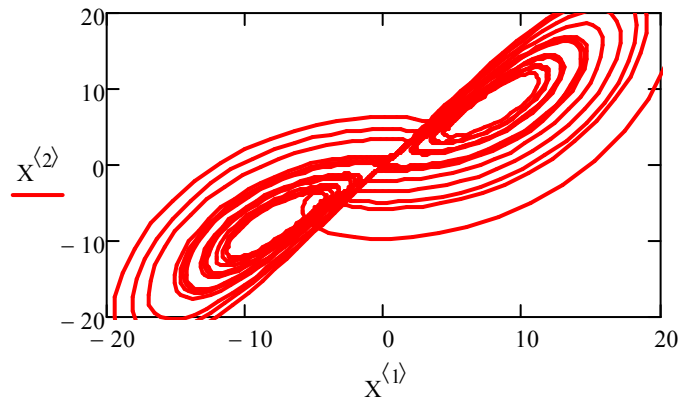


B=2.5

J. Программа Lorenz Attractor. Аттрактор Лоренца

$$\begin{pmatrix} s \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 2.2 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix} \quad F(t, x) := \begin{pmatrix} s \cdot x_1 - s \cdot x_0 \\ -x_0 \cdot x_2 + r \cdot x_0 - x_0 \\ x_1 \cdot x_0 - b \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

X := rkfixed(x, 0, 20, 2000, F)



Учебное издание

ПОМЕРАНЦЕВ Юрий Александрович,
СВИРИДОВ Владимир Владимирович

Введение в синергетику

Учебно-методическое пособие

для студентов магистратуры, обучающихся по направлению подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование», профиль «Физическое образование» и студентов бакалавриата, обучающихся по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование», профили «Естествознание», «Физика»

В авторской редакции

Изготовление оригинала-макета: *О.В. Ситникова*

Подписано в печать 27.04.2017. Формат 60 x 84/16. Печать трафаретная.
Гарнитура «Таймс». Усл.-печ. л. 5,5. Уч.-изд. л. 5,11. Тираж 25 экз. Заказ 95.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный педагогический университет».

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре ВГПУ.
394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86. Тел. (473) 255-58-32; 255-61-83.